Элементы линейной алгебры и математического анализа

А.Е.Умнов

МГППУ, Москва, 2008. Верс. 11нояб.2008г

Глава 1

Предлагаемый курс "Элементы линейной алгебры и математического анализа"имеет свой целью подготовку к изучению таких специальных разделов высшей математики, как "Теория вероятностей"и "Математическая статистика", являющихся существенным компонентом образовательной базы специалистов в области психологии.

Данный учебный курс (включающий как лекционные теоретические занятия, так и практические упражнения, рассчитанный на один учебный семестр подготовки студентов очной формы обучения) включает следующие разделы:

– матрицы и системы линейных уравнений,
– функции, последовательности и пределы,
– производные, интегралы и ряды.

Подобная структура не является традиционной для учебных курсов высшей математики. Как содержание ее разделов, так и последовательность изложения материала в первую очередь обусловлены задачей формирования базы знаний, которая послужит основой, обеспечивающей успешное освоение элементов теории вероятностей и математической статистики студентами психолого-педагогических специальностей.

1.1 Некоторые полезные сведения из курса элементарной математики

Хотя изначально предполагается, что студенты владеют основами элементарной математики в объеме учебных программ средней школы, представляется целесообразным привести (в справочной форме) перечень некоторых сведений, необходимых для успешного освоения предлагаемого курса.

1°. **Формулы сокращенного умножения**

Для любых чисел a и b справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
&(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\\
&(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,\\
&a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),\\
&(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\\
&(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,\\
&a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2),\\
&a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).
\end{aligned}
$$

Напомним также, что для любых *неотрицательных* чисел a и b имеет место соотношение $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, причем по определению арифметического квадратного корня принимается, что

$$\sqrt{a^2} = |a| = \left[\begin{array}{r} a,\text{если } a \geq 0,\\ -a,\text{если } a < 0.\end{array}\right.$$

2°. **Линейные уравнения**

Уравнение вида

$$ax + b = 0,$$

где x – неизвестное, а $a \neq 0$ и b – фиксированные числа, называется *линейным* и имеет единственное решение $x = -\dfrac{b}{a}$.

3°. **Квадратные уравнения**

Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x – неизвестное, а $a \neq 0$ и b, c – фиксированные числа, называется *квадратным* и имеет
при $D > 0$ *два* решения

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a},$$

где *дискриминант* $D = b^2 - 4ac$
при $D = 0$ *одно* решение

$$x = -\frac{b}{2a}\ ;$$

при $D < 0$ *не имеет* решений.
Если квадратное уравнение имеет корни, то будут выполняться следующие равенства (*теорема Виета*)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\ .$$

4°. **Степени и их свойства**

Степенью числа a порядка k (k – натуральное число и $k \geq 2$), обозначаемой a^k, называется произведение вида $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a}_{k \text{ сомножителей}}$. В этом случае число a называют *основанием*, а число k – *показателем* степени.

Степени обладают свойствами:

$$1)\ a^{n+m} = a^n \cdot a^m;$$
$$2)\ (a^n)^m = a^{nm}.$$

Понятие степени положительного и не равного единицы числа a можно обобщить на случай, когда ее показатель есть любое рациональное число вида $p = \frac{m}{n}$, то есть числа m и n любые целые ($n \neq 0$). Для этого по определению принимают, что для любого $a > 0$ и $a \neq 1$ выполняются равенства

$$a^1 = a\ ; \qquad a^0 = 1\ ; \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m}\ ; \qquad a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}.$$

Тогда для степеней с рациональным показателем также будут справедливы свойства 1) и 2:

$$1)\ a^{p+q} = a^p \cdot a^q;$$
$$2)\ (a^p)^q = a^{pq}.$$

В курсе математического анализа также доказывается, что соотношения 1) и 2) будут справедливы для любых вещественных чисел p и q, при любом положительном, не равном единице вещественном числе a. Функция $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$ называется *показательной*. На рис.1.1 показан вид ее графика при $a = 3$.

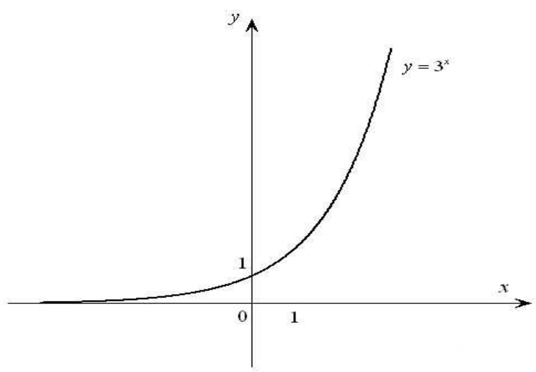


Рис. 1.1: График показательной функции

5°. **Логарифмы и их свойства**

Логарифмом положительного числа a по основанию b (b – положительное число и $b \neq 1$), обозначаемым $\log_b a$, называется показатель степени, в которую следует возвести число b, чтобы получить число a.

Число b принято называть *основанием* логарифма. Отметим, что данное определение можно также представить в виде формулы

$$b^{\log_b a} = a, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1,$$

которую называют *основным логарифмическим тождеством.*

Для часто используемых на практике десятичных логарифмов (то есть логарифмов по основанию 10) для упрощения записи применяется специальное обозначение $\log_{10} a = \lg a$. По той же причине в высшей математике логарифмы по основанию e (иррациональное число $e \approx 2.72\ldots$), называемые *натуральными*, обозначают $\log_e a = \ln a$.

Логарифмы для любых положительных чисел a, b, c и $c \neq 1$ обладают следующими, вытекающими из свойств степеней, свойствами:

$$1)\ \log_c ab = \log_c a + \log_c b;$$
$$2)\ \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b;$$
$$3)\ \log_c a^b = b \log_c a;$$
$$4)\ \log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}, \quad b \neq 1.$$

Формулу 4) можно использовать для перехода от одного основания логарифма к другому. Например, $\log_2 17 = \dfrac{\lg 17}{\lg 2}$.

В курсе математического анализа также доказывается, что соотношения 1) – 4) будут справедливы для всех положительных аргументов и при любом положительном, не равном единице основании логарифма. Функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ называется *логарифмической*. На рис.1.2 показан вид ее графика при $a = 3$.

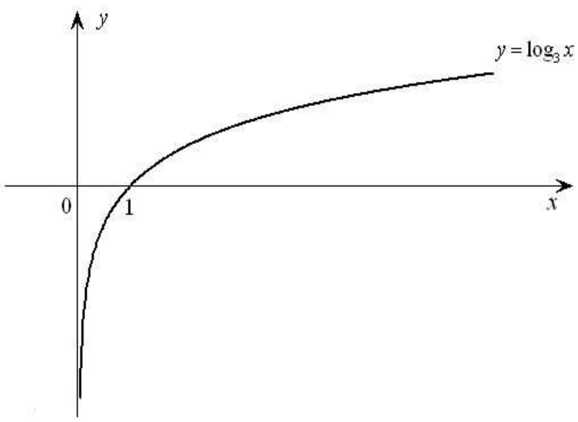


Рис. 1.2: График логарифмической функции

6°. **Тригонометрические функции, тождества и уравнения**

Напомним, что углы можно измерять как в *градусной*, так и в *радианной* мере. За один *градус* принимают величину центрального угла, опирающегося на дугу в окружности, длина которой равна $\frac{1}{360}$ длины окружности. За один *радиан* принимают величину центрального угла в окружности, опирающегося на дугу, длина которой равна радиусу этой окружности. Таким образом, угол в 360^o будет равен углу в 2π радиан.

Определение основных тригонометрических функций удобно давать при помощи так называемого "тригонометрического круга", показанного на рис.1.3.

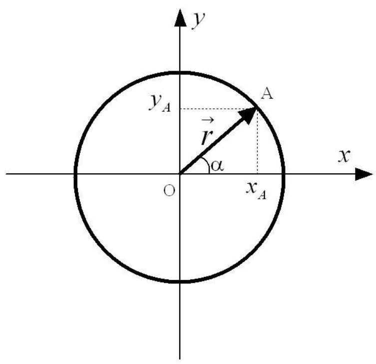


Рис. 1.3: Определение основных тригонометрических функций

Синусом угла α называется отношение y-координаты точки A к длине вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$.

Косинусом угла α называется отношение x-координаты точки A к длине вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$.

Тангенсом угла α называется отношение y-координаты точки A к ее x-координате.

Заметим, что в силу этих определений

1) синус и косинус имеют значение для *любых* углов α. В то время как тангенс не существует для углов равных $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то есть для углов $\pm 90^o$, $\pm 270^o$, $\pm 450^o, \ldots$.
2) тригонометрические функции обладают свойством *периодичности*, то есть их значения будут повторяться при изменений аргумента на одно и то же положительное число, называемое *периодом.*

Тригонометрические функции вещественного аргумента x (обычно измеряемого в радианной мере) принято обозначать $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $y = \operatorname{tg} x$. Их графики приведены на рисунках 1.4 – 1.6.

Для тригонометрических функций справедливы равенства, позволяющие выражать одни из них через другие. Приведем наиболее часто употребляемые на практике соотношения.

1) Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ , \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \ , \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x \ .$$

2) Формулы суммы и разности аргументов

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \ ,$$

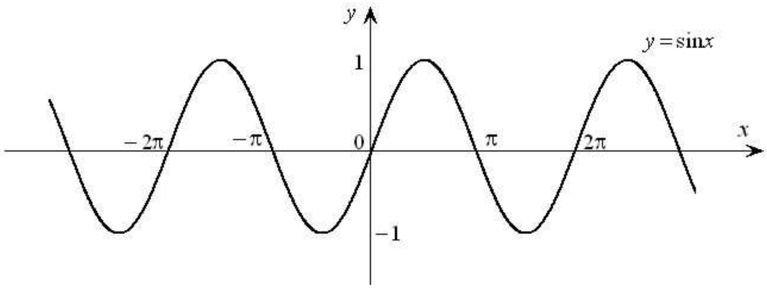


Рис. 1.4: График функции *синус*

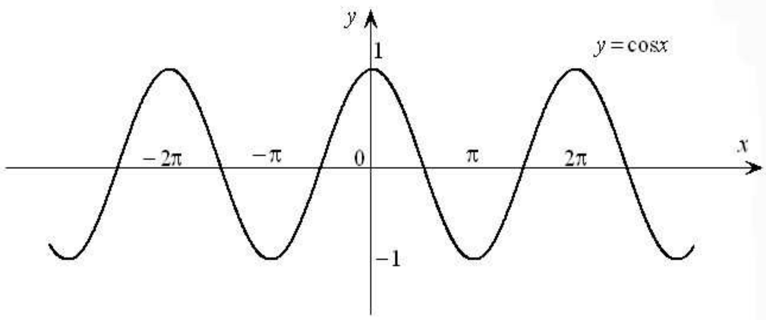


Рис. 1.5: График функции *косинус*

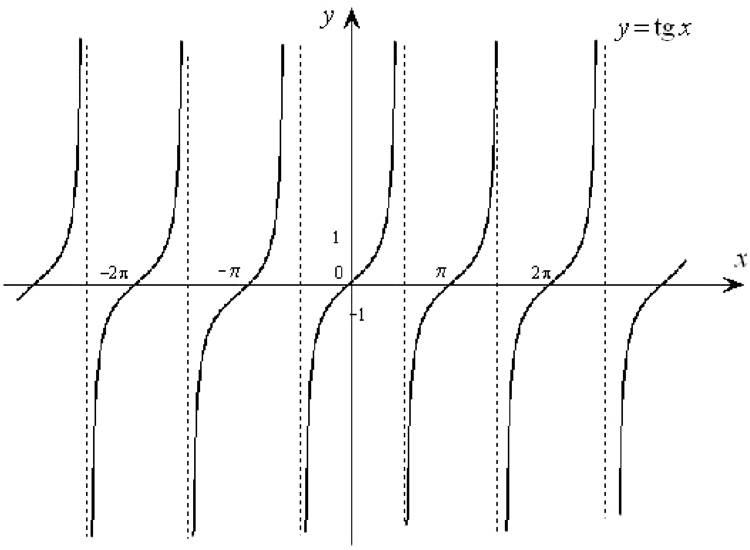


Рис. 1.6: График функции *тангенс*

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\ ,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\ ,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\ ,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\ ,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\ .$$

3) Формулы двойных аргументов

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\ ,\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\ ,\quad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\ .$$

3) Формулы преобразования суммы (разности) тригонометрических функций в произведение

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ,$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\ ,$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ,$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ ,$$
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ ,$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}\ .$$

В вычислительной практике достаточно часто возникает задача определения величины угла по значению какой-либо из его тригонометрических функций. Для решения этой задачи используются *обратные тригонометрические функции*: *арксинус* $y = \arcsin x$, *арккосинус* $y = \arccos x$ и *арктангенс* $y = \operatorname{arctg} x$. Дадим определения этих функций.

Арксинусом x при условии, что $|x| \le 1$, называется число y такое, что $|y| \le \frac{\pi}{2}$ и $\sin y = x$.

Арккосинусом x при условии, что $|x| \le 1$, называется число y такое, что $0 \le y \le \pi$ и $\cos y = x$.

Арктангенсом x (для любого x) называется число y такое, что $|y| \le \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} y = x$.

Отметим, что аргументы обратных тригонометрических функций не имеют размерности, в то время как их значения являются углами и изменяются как правило в радианной мере. Графики обратных тригонометрических функций приведены на рисунках 1.7 – 1.9.

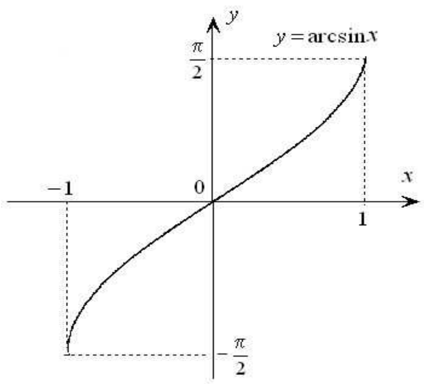


Рис. 1.7: График функции *арксинус*

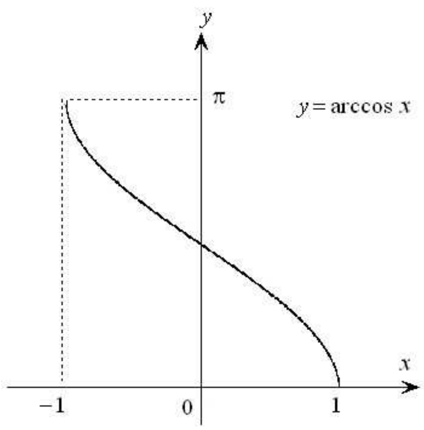


Рис. 1.8: График функции *арккосинус*

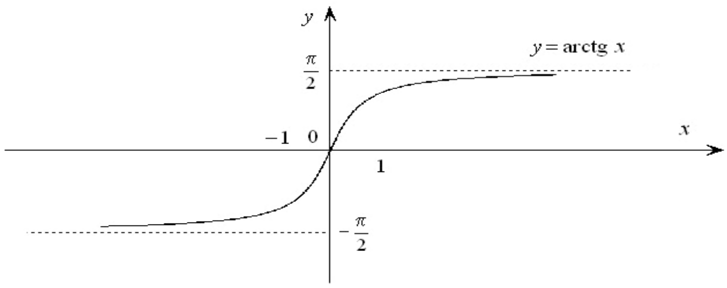


Рис. 1.9: График функции *арктангенс*

Обратные тригонометрические функции можно использовать для записи решений тригонометрических уравнений. Так, например, уравнение

$$\sin x = a \quad \text{при } |a| \le 1 \text{ имеет корни вида } x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \ ,$$

$$\text{уравнение} \quad \cos x = a \quad \text{при } |a| \le 1 \text{ имеет корни } x = \pm \arccos a + 2\pi n \ ,$$

$$\text{уравнение} \quad \operatorname{tg} x = a \quad \text{при любом } a \text{ имеет корни } x = \operatorname{arctg} a + \pi n \ ,$$

причем во всех этих формулах n – любое целое число, то есть, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

7°. Множества. Элементы комбинаторики

Под *множеством* в математике понимают совокупность объектов (или элементов), которые можно отличать как друг от друга, так и от объектов, не входящих в данную совокупность.

Тот факт, что объект x принадлежит множеству X принято обозначать как $x \in X$. Если объект x не принадлежит множеству X, то используется обозначение $x \notin X$. Для обозначения *пустого* множества, то есть не имеющего в своем составе ни одного объекта, используется символ $\emptyset$. Наконец, два множества X и Y, состоящие из одних и тех же объектов, называются *равными* с обозначением факта равенства как $X = Y$.

Для множеств существуют операции *объединения*, обозначаемая символом $\bigcup$, и *пересечения* – $\bigcap$. Запись $x \in X \bigcup Y$ означает, что объект x принадлежит либо множеству X, либо множеству Y. В свою очередь, запись $x \in X \bigcap Y$ означает, что объект x принадлежит одновременно как множеству X, так и множеству Y.

Если объектами, входящими в состав множества X являются числа, то такое множество принято называть *числовым.* Множество состоящее из чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$, называется *отрезком* и обозначается $[a, b]$. Если же числовое множество состоит из чисел, для которых $a < x < b$, то оно называется *интервалом* и обозначается (a, b).

Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждую *упорядоченную* выборку из этого множества, содержащую k элементов, называют *размещением* из n элементов по k элементов (иногда говорят: "размещение из n по k"). В рассматриваемом случае очевидно, что $n \ge k \ge 0$. Число всех размещений из n по k обозначается A_n^k. Если учесть, что при $k = 0$

существует только одно размещение – пустое множество $\emptyset$, то справедливо равенство

$$A_n^k = \left[\begin{array}{r} 1, \text{если } k = 0, \\ n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1), \text{если } k > 0. \end{array} \right.$$

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n принято обозначать

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

(читается "эн-факториал"). С помощью этого обозначения формула для полного числа размещений упрощается и принимает вид

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Заметим, что в силу $A_0^0 = 1$, имеет смысл считать (по определению) $0! = 1$. Тогда данная формула будет верной для любых $n \geq k \geq 0$.

Размещение из n элементов по n называется *перестановкой* из n элементов. Число всех перестановок из n элементов $P_n = n!$.

Согласно своему определению, размещения могут отличаться друг от друга как составом своих элементов, так и порядком их следования. Если же порядок следования элементов в выборке не существенен, то такую выборку k элементов из n принято называть *сочетанием* из n элементов по k элементов (иногда говорят: "сочетание из n по k"). Формула для C_n^k – числа всех сочетаний из n по k имеет вид

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Используя эту формулу, можно получить следующие полезные соотношения: $C_n^k = C_n^{n-k}$ и

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Последнее равенство носит название *формулы бинома Ньютона* и является обобщением некоторых формул, приведенных в 1°.

8°. **Прогрессии**

Будем говорить, что задана *числовая последовательность*, если указано правило, каждому натуральному числу (номеру) n поставлено сопоставлено единственное число x_n, называемое значением n-го члена последовательности. Числовую последовательность принято обозначать как $\{x_n\}$.

Числовая последовательность называется *арифметической прогрессией* $\{a_n\}$, если каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с постоянным числом d, называемым *разностью прогрессии.* Таким образом, для задания арифметической прогрессии следует указать ее первый член и разность, тогда для любого номера n будет справедливо равенство $a_{n+1} = a_n + d$.

В арифметической прогрессии значение ее n-го члена может быть найдено по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$. Кроме того, справедливо равенство

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \ ,$$

позволяющее находить сумму первых n членов арифметической прогрессии.

Числовая последовательность называется *геометрической прогрессией* $\{b_n\}$, если каждый ее член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на постоянное число q, называемое *знаменателем прогрессии.* Для задания геометрической прогрессии следует указать ее первый член и знаменатель, тогда для любого номера n будет справедливо равенство $b_{n+1} = b_n q$.

В геометрической прогрессии значение ее n-го члена может быть найдено по формуле $b_n = b_1 q^{n-1}$. Кроме того, справедливо соотношение

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_n = \left[\begin{array}{r} b_1 n, \text{если } q = 1, \\ b_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, \text{если } q \neq 1, \end{array} \right.$$

позволяющее находить сумму первых n членов геометрической прогрессии.

Наконец, если $|q| < 1$, то такая геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, и в последнем равенстве можно перейти к пределу при неограниченном возрастании n. Величина этого предела, называемая суммой бесконечно убывающей прогрессии, будет равна $\dfrac{b_1}{1-q}$.

9°. **Специальные обозначения и соглашения**

В современных математических текстах допускаются некоторые стандартные обозначения, практически не применяемые в пособиях, используемых при изучении математики в средней школе. Поскольку это обстоятельство может до некоторой степени усложнить освоение студентами курса математики, представляется целесообразным привести краткое описание этих стандартов и правил их использования.

1) *Символы общности и существования*

Символ *общности* $\forall$ используется для замены слов "всякий", "любой", "для любого", в то время как символ *существования* $\exists$ заменяет слова "существует", "найдется". Например, определение ограниченной числовой последовательности: последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если

> найдется неотрицательное число C такое, что для любого номера n будет выполнено неравенство $|x_n| \leq C$,

может быть записано так: последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если $\exists C \geq 0 : \forall n : |x_n| \leq C$.

2) *Символы суммирования и произведения*

Если необходимо записать выражение для суммы, в которой число слагаемых не имеет конкретного значения, но известно как зависит величина каждого слагаемого от его номера, то можно использовать специальный символ суммирования $\sum\limits_{k=1}^{n}$, указав при этом общий вид слагаемого и диапазон изменения индекса суммирования. Можно считать, что этот символ заменяет слова "сумма по k в пределах от 1 до n ... "

Например, сумма

$$\sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \cdots + \sin(m-1) + \sin m$$

записывается как

$$\sum_{k=1}^{m} \sin k,$$

а сумма

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)n}$$

представляется в виде

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k}$$

.

Еще один пример: формула бинома Ньютона с помощью символа суммирования может быть записана как

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Аналогичный вид записи существует и для произведений. Например, равенство

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$$

можно записать в виде

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!.$$

10°. **Полезные неравенства**

Для любых двух неотрицательных чисел a и b верно *неравенство Коши*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\ ,$$

которое иногда используется в следующей форме: для любых двух вещественных чисел x и y справедливо соотношение

$$x^2 + y^2 \geq 2|xy|\ .$$

Заметим, что неравенство Коши верно и для большего числа неотрицательных чисел:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n}\ .$$

С помощью символов суммирования и умножения последнее соотношение можно записать как

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}\ .$$

В большом числе прикладных задач необходимые оценки могут быть получены при помощи, вытекающего из формулы бинома Ньютона и верного для любого x и любого $a > -1$, *неравенства Бернулли*

$$(1+a)^x \geq 1 + xa\ .$$

1.2 Замечания о роли точности определений и формулировок

В процессе изучения математики следует обращать особое внимание на полноту и точность определений, формулировок теорем и описания свойств. Недопустима как избыточность (излишняя многословность) подобных лексем, так и потеря каких-либо их деталей.

Проиллюстрируем это следующими примерами.

1°. *Арифметический квадратный корень.* Как это уже было отмечено, по определению арифметического квадратного корня считается, что $\sqrt{a^2} = |a|$. Может возникнуть вопрос: "Не проще ли положить, что $\sqrt{a^2} = a$?"Что бы показать ошибочность такого определения, рассмотрим следующую цепочку преобразований: для *любой* пары чисел x и y будут верными равенства

$$x^2 - 2xy + y^2 = y^2 - 2yx + x^2,$$
$$(x-y)^2 = (y-x)^2,$$
$$\sqrt{(x-y)^2} = \sqrt{(y-x)^2}.$$

Если теперь использовать определение вида $\sqrt{a^2} = a$, то мы получим

$$x - y = y - x \quad \Rightarrow \quad x = y,$$

что очевидно неверно. В то время как использование определения $\sqrt{a^2} = |a|$ дает

$$|x - y| = |y - x| \quad \Rightarrow \quad 0 = 0,$$

что верно для любой пары чисел x и y.

2°. *Сколько корней может иметь квадратное уравнение?* Рассмотрим три следующих утверждения A), B) и C):

A) Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ – квадратное.

B) Квадратное равнение не может иметь более двух корней.

C) Для любых, попарно неравных чисел α, β и γ уравнение

$$\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} = 1$$

может быть приведено к виду A) и при этом оно имеет три различных корня $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \gamma$.

Очевидно, что утверждения A), B) и C) противоречивы в свой совокупности. Иначе говоря, одно из них ошибочное и, на первый взгляд, наибольшие сомнения вызывает утверждение C). Однако, оно на самом деле верное, а ошибка содержится в утверждении A). Дело в том, что квадратным называется уравнение $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$. И именно для него верно утверждение B). В нашем же случае, если привести уравнение C) к виду, указанному в утверждении A), коэффициент при x^2 окажется равным нулю. Более того, это уравнение примет вид $1 = 1$, то есть является *тождеством* – верным равенством при любом значении x (в том числе и при $x_1 = \alpha,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \gamma$).

3°. *Можно ли произвольно группировать слагаемые в сумме?* Казалось бы ассоциативность операции сложения для чисел позволяет дать положительный ответ на данный вопрос. Однако это верно лишь для сумм с конечным числом слагаемых. Если число слагаемых в сумме не ограничено, то возможно возникновение ситуации подобной следующей. Согласимся "на веру"с утверждением, что сумма неограниченного числа нулей равна нулю, и рассмотрим сумму вида

$$A = 1 + 2 - 3 + 1 + 2 - 3 + 1 + 2 - 3 + 1 + 2 - 3 + 1 + 2 - 3 + \dots$$

сгруппировав слагаемые сначала как

$$A = (1 + 2 - 3) + (1 + 2 - 3) + (1 + 2 - 3) + (1 + 2 - 3) + (1 + 2 - 3) + \dots$$

придем к заключению, что $A = 0$, поскольку каждая сумма в скобках дает ноль. Однако, при другом способе группировки

$$A = 1 + (2 - 3 + 1) + (2 - 3 + 1) + (2 - 3 + 1) + (2 - 3 + 1) + (2 - 3 + \dots$$

получаем $A = 1$. Что означает неприменимость сочетательного правила для сумм с неограниченным числом слагаемых.

Последний пример иллюстрирует тот факт, что с "бесконечностью"нельзя оперировать как с обычным числом. Заметим, что аналогичные проблемы могут возникнуть и в случае подмены понятий "отсутствие определенности"и "существование вероятности", которая нередко допускается при рассуждениях на интуитивном уровне.

Глава 2

Элементы линейной алгебры

2.1 Матрицы

2.1.1 Определение и классификация матриц

Определение 2.1.1.1. Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, имеющая m строк и n столбцов.

Матрицу принято символически обозначать при помощи двойных вертикальных ограничителей: $\|A\|$, либо записывать в развернутом в виде

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

Каждое из чисел a_{ij} называется *элементом* матрицы $\|A\|$, а числа i и j – соответственно *строковыми* и *столбцовыми индексами* элемента a_{ij}. Число i показывает в какой строке матрицы расположен элемент a_{ij}, число j – в каком ее столбце этот элемент находится.

Матрицы классифицируются как по числу строк и столбцов, например,

квадратная, порядка n, состоящая из n строк и n столбцов,

m-компонентная *строка*, имеющая одну строку ($m = 1$) и n столбцов,

n-компонентный *столбец*, имеющий m строк и один столбец ($n = 1$),

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{array} \right\| \qquad \left\| \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{array} \right\|,$$

так и по значению их элементов, например,

нулевая матрица (обозначаемая часто как $\|O\|$), все элементы которой равны нулю, *единичная* матрица порядка n, вида

$$\|E\| = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|.$$

2.1.2 Операции с матрицами

С матрицами возможно выполнять операции: сравнения, сложения, умножения числа на матрицу, транспонирования, произведения и обращения. Правила выполнения этих операций дают следующие определения.

Определение 2.1.2.1. **Сравнение.** Две матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$ называются *равными* (что обозначается как $\|A\| = \|B\|$), если они равных размеров и имеют равные соответствующие элементы.

Пример 2.1.2.1. Сравнение матриц:

а) $\left\| \begin{array}{cc} \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \\ \cos\frac{\pi}{2} & \sin\frac{\pi}{2} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|$;

б) $\left\| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right\| \neq \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{array} \right\|$, поскольку сравниваемые матрицы имеют разное число столбцов.

Определение 2.1.2.2. **Сложение.** Матрица $\|C\|$ называется *суммой* матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ (что обозначается как $\|A\|+\|B\| = \|C\|$), если все они равных размеров $m \times n$ и каждый элемент матрицы $\|C\|$ равен сумме соответствующих элементов матриц $\|A\|$ и $\|B\|$, то есть $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = [1, m], j = [1, n]$.

Пример 2.1.2.2. Сложение матриц:

$$\left\| \begin{array}{rrrr} \lg 7 & \lg 6 & \lg 8 & \lg 18 \\ \lg 9 & \lg 5 & \lg 15 & 3\lg 2 \\ -\lg 4 & \lg 3 & 2\lg 5 & \lg 11 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{rrrr} \lg 2 & \lg 6 & \lg 3 & -\lg 3 \\ \lg 2 & \lg 5 & -\lg 3 & -\lg 8 \\ \lg 20 & \lg 4 & \lg 3 & \lg 3 \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{rrrr} \lg 14 & 2\lg 6 & \lg 24 & \lg 6 \\ \lg 18 & \lg 25 & \lg 5 & 0 \\ \lg 5 & \lg 12 & \lg 75 & \lg 33 \end{array} \right\|.$$

Определение 2.1.2.3. **Умножение числа на матрицу.** Матрица $\|B\|$ называется *произведением числа x на матрицу* $\|A\|$ (что обозначается как $x \cdot \|A\|$), если каждый элемент матрицы $\|B\|$ равен произведению числа x на соответствующий элемент матрицы $\|A\|$, то есть $b_{ij} = x \cdot b_{ij}$ для всех $i = [1, m], j = [1, n]$.

Пример 2.1.2.3. Умножение числа на матрицу:

$$\frac{1}{9} \cdot \left\| \begin{matrix} 3^5 & 3^{-1} & 3^2 \\ 3^{-2} & 3^4 & 3^3 \\ 3^4 & 3^{-3} & 3^6 \\ 3 & 3^2 & 3^3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 27 & 3^{-3} & 1 \\ 3^{-4} & 9 & 3 \\ 3^2 & 3^{-5} & 81 \\ \frac{1}{3} & 1 & 3 \end{matrix} \right\|.$$

Определение 2.1.2.4. **Транспонирование матрицы.** Результатом *транспонирования* матрицы $\|A\|$ является новая матрица, обозначаемая $\|A\|^{\mathrm{T}}$, строками которой служат столбцы исходной матрицы $\|A\|$, записанные с сохранением порядка их следования.

Пример 2.1.2.4. Транспонирование матрицы:

$$\left\| \begin{matrix} 3 & 1 & 4 & 7 & 7 \\ 2 & 8 & 5 & 6 & 6 \end{matrix} \right\|^{\mathrm{T}} = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \\ 4 & 5 \\ 7 & 6 \\ 7 & 6 \end{matrix} \right\|$$

Определение 2.1.2.5. **Произведение матриц.** Матрица $\|C\|$ размера $m \times n$ называется *произведением* матриц $\|A\|$ размера $m \times l$ и $\|B\|$ размера $l \times n$ (обозначается как $\|A\| \cdot \|B\| = \|C\|$), причем каждый элемент матрицы $\|C\|$ равен

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{i(l-1)}b_{(l-1)j} + a_{il}b_{lj}$$

или $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj}$ для всех $i = [1, m], j = [1, n]$.

Пример 2.1.2.5. Вычислить произведение матриц:

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} 3 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \text{ и } \|B\| = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{matrix} \right\|.$$

Найдем матрицу $\|C\| = \|A\| \cdot \|B\|$. Согласно определению 2.1.2.5 матрица $\|C\|$ будет иметь две строки и три столбца. Подсчитаем значения всех ее шести элементов, приняв во внимание, что в данном примере $l = 5$.

$$\begin{aligned}
&c_{11} = 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 + (-2) \cdot 0 = 18, \\
&c_{12} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 3 = -7, \\
&c_{13} = 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) = -7, \\
&c_{21} = 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot (-3) + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 20, \\
&c_{22} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 = 3, \\
&c_{23} = 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = -11.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\|C\| = \left\| \begin{matrix} 18 & -7 & -7 \\ 20 & 3 & -11 \end{matrix} \right\|$.

Отметим два полезных свойства операции произведения матриц.

1. Результатом умножения любой матрицы на нулевую матрицу подходящего размера всегда будет нулевая матрица.
2. При умножении матрицы слева или справа на единичную матрицу подходящего размера исходная матрица не меняется.

Использование операций с матрицами позволяют в большом числе случаев упрощать как постановку, так и решение различных математических задач. Например, система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\left\{ \begin{matrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{matrix} \right.$$

может быть записана в виде $\|A\| \cdot \|X\| = \|B\|$, где

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\|; \quad \|X\| = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix} \right\|; \quad \|B\| = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix} \right\|.$$

Проверьте это самостоятельно.

Определение 2.1.2.6. **Обращение матрицы.** Результатом *обращения* квадратной матрицы $\|A\|$ является новая матрица, называемая *обратной* к $\|A\|$ и обозначаемая $\|A\|^{-1}$, для которой верны равенства

$$\|A\|^{-1} \cdot \|A\| = \|A\| \cdot \|A\|^{-1} = \|E\|,$$

где $\|E\|$ - квадратная единичная матрица того же размера, что и матрица $\|A\|$.

Пример 2.1.2.6. Обращение матрицы:

а) Очевидный пример

$$\left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix} \right\|^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{matrix} \right\|.$$

б) Не столь очевидный, но, тем не менее, верный пример

$$\left\| \begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix} \right\|^{-1} = \left\| \begin{matrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix} \right\|.$$

Действительно, справедливо равенство

$$\left\| \begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Второе равенство определения 2.1.2.6 проверяется аналогичным образом.

Важно отметить, что не любая квадратная матрица имеет обратную. Например, нулевая матрица необратима. Более детально условия, при которых у квадратной матрицы имеется обратная, будут рассмотрены в следующем параграфе.

2.1.3 Числовые характеристики матриц

Матрицы характеризуются такими количественными характеристиками, как детерминанты (определители) и ранги.

Рассмотрим важные для приложений определители квадратных матриц второго и третьего порядков.

Определение 2.1.3.1. **Детерминант (определитель) квадратной матрицы 2-го порядка.** Детерминантом квадратной матрицы второго порядка $\|A\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$ называется число, находимое по формуле

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

и обозначаемое $\det\|A\| = \det\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$.

Определение 2.1.3.2. **Детерминант (определитель) квадратной матрицы 3-го порядка.** Детерминантом квадратной матрицы третьего порядка $\|A\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$ называется число, находимое по формуле

$$\begin{gathered} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{gathered}$$

и обозначаемое $\det\|A\| = \det\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$.

Для квадратных матриц более высокого порядка также можно ввести определение детерминанта, обобщающее определения 2.1.3.1 и 2.1.3.2. Однако этот вопрос выходит за рамки нашего курса.

Пример 2.1.3.1. Вычисление детерминантов квадратных матриц второго и третьего порядков:

а) $n = 2$

$$\det\begin{Vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -1 \end{Vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 7 \cdot 5 = -38.$$

б) $n = 3$

$$\det \begin{Vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 7 \end{Vmatrix} = 5 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 11 \cdot 0 - (-2) \cdot 0 \cdot 7 - 5 \cdot 11 \cdot 0 = 210.$$

На практике использование определения детерминанта квадратной матрицы второго порядка не вызывает затруднений. А для квадратных матриц третьего порядка вычисление детерминанта удобнее выполнять по так называемому методу "треугольников", заметив, что в формуле 2.1.3.1 со знаком *плюс* входят произведения следующих выделенных троек элементов

$$\begin{Vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix},$$

а со знаком *минус* – произведения троек

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ \boxed{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & \boxed{a_{32}} & a_{33} \end{Vmatrix}.$$

Правило выбора произведений троек элементов квадратной матрицы третьего порядка при вычислении ее определителя иллюстрирует рис. 2.1.

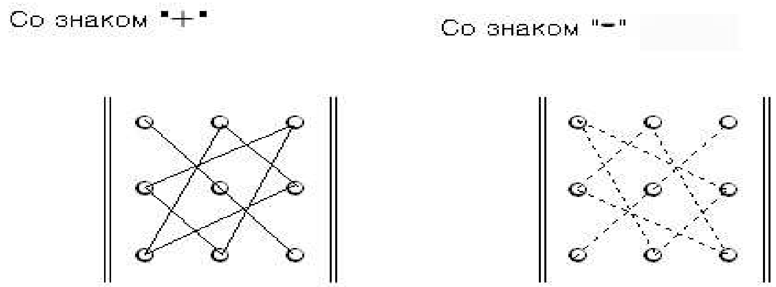


Рис. 2.1: Правило "треугольников"

Альтернативой использования метода "треугольников"является одна из формул, позволяющих выразить определитель третьего порядка через три определителя второго порядка. Например, формулой *разложения по первой строке*

$$\det \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \det \begin{Vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{Vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{Vmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{Vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{Vmatrix},$$

проверяемой непосредственно по определению 2.1.3.2.

Запомнить эту формулу несложно, если заметить, что

1) коэффициенты при определителях второго порядка есть элементы первой строки, взятые с чередующимися знаками плюс и минус;
2) определители второго порядка есть детерминанты квадратных матриц, получаемых из исходной удалением строки и столбца, содержащих элемент, являющийся коэффициентом при определителе второго порядка.

Аналогичные формулы существуют *для любых строк и столбцов* квадратной матрицы.

Отметим, что использование формул разложения по строке (или столбцу) особенно эффективно, когда эта строка содержит нулевые элементы. Так, в примере 2.1.3.1.б целесообразно вычислять значение детерминанта, разложив его по первому столбцу или по третьей строке. Соответствующие формулы будут иметь следующий вид.

$$\det \begin{Vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 7 \end{Vmatrix} =$$
$$= 5 \cdot \det \begin{Vmatrix} 6 & 11 \\ 0 & 7 \end{Vmatrix} - 0 \cdot \det \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 7 \end{Vmatrix} + 0 \cdot \det \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 11 \end{Vmatrix} =$$
$$= 5 \cdot (6 \cdot 7 - 11 \cdot 0) = 210;$$

$$\det \begin{Vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 7 \end{Vmatrix} =$$
$$= 0 \cdot \det \begin{Vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 11 \end{Vmatrix} - 0 \cdot \det \begin{Vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 11 \end{Vmatrix} + 7 \cdot \det \begin{Vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 6 \end{Vmatrix} =$$
$$= 7 \cdot (5 \cdot 6 - (-2) \cdot 0) = 210.$$

В приведенном примере для вычисления значения определителя третьего порядка оказалось достаточно найти значение одного определителя второго порядка, поскольку как первый столбец, так и третья строка имеют по два нулевых элемента.

Отметим теперь основные свойства определителей.

- при транспонировании квадратной матрицы ее определитель не меняется;
- если в матрице поменять местами две строки (или столбца), то ее определитель изменит знак на противоположный;
- из строки (столбца) определителя можно выносить общий множитель;
- определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей сомножителей: если $\|C\| = \|A\| \cdot \|B\|$, то $\det \|C\| = \det \|A\| \cdot \det \|B\|$;
- для того, чтобы квадратная матрица была обратимой необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля, при этом условии матрица, обратная к матрице второго порядка

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix},$$

будет определяться формулой

$$\|A\|^{-1} = \frac{1}{\det\|A\|} \cdot \begin{Vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{Vmatrix};$$

- определитель матрицы равен нулю, если
  - в матрице есть нулевой столбец (нулевая строка);
  - матрица имеет две пропорциональные (в том числе, равные) строки (столбцы);

Как уже было отмечено, детерминант является числовой характеристикой квадратной матрицы. Для неквадратной матрицы используется иная, но также количественная характеристика, называемая ее *рангом*.

Пусть дана матрица $\|A\|$ размера $m \times n$. Выберем в ней произвольным способом k столбцов и k строк, на пересечении которых стоят элементы, образующие квадратную подматрицу k-го порядка. Определитель этой подматрицы называется *минором* k-го порядка матрицы $\|A\|$.

Определение 2.1.3.3. **Рангом матрицы** $\|A\|$ называется *максимальный* порядок отличных от нуля ее миноров. Ранг обозначается $\operatorname{rg}\|A\|$.

Из этого определения вытекает, что миноров большего порядка, чем число строк или столбцов матрицы, существовать не может. Следовательно, $\operatorname{rg}\|A\| \leq \min\{m, n\}$.

Пример 2.1.3.2. Найдем ранги следующих матриц:

а)

$$\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{Vmatrix} = 2.$$

б)

$$\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} = 1.$$

в)

$$\operatorname{rg}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{Vmatrix} = 2.$$

Поясним полученные значения рангов. Для в матрице задачи а) можно выделить четыре ненулевых минора первого порядка и один минор второго порядка, совпадающий с определителем этой матрицы, значение которого $3 \cdot 4 - (-5) \cdot (-2) = 2 \neq 0$. Следовательно ранг матрица, данной в примере а)равен 2.

В примере б) данная матрица имеет три столбца и четыре строки. Значит, ее ранг не может быть больше, чем 3. При этом, матрица имеет двенадцать ненулевых миноров первого порядка, а все миноры второго и третьего порядков равны нулю, как определители квадратных матриц с одинаковыми строками. Поэтому ранг данной матрицы равен 1.

Наконец, в примере в) у матрицы, данной в условии, есть четыре ненулевых минора первого порядка и один ненулевой минор второго порядка. А все миноры порядков три и четыре оказываются равными нулю, поскольку их матрицы содержат по крайней мере один нулевой столбец. Следовательно ранг данной матрицы равен 2.

2.2 Системы линейных уравнений

В курсе элементарной математики рассматривается в качестве основного алгоритма решения систем линейных уравнений метод последовательного исключения неизвестных. Рассмотрим его применение для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. \tag{2.2.1}$$

в предположении, что эта система имеет единственное решение.

При использовании метода исключения, на первом шаге из последнего уравнения выражается x_n через $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$. Затем полученное выражение подставляется в остальные $n-1$ уравнения. В результате мы получаем систему состоящую из $n-1$ уравнения с $n-1$ неизвестным. Последовательное повторение этой процедуры приведет к одному линейному уравнению с одним неизвестным x_1, решив которое, можно последовательно (в обратном порядке) получить значения остальных неизвестных.

Рассмотрим теперь другой способ решения системы (2.2.1), основанный на использовании матричных операций, детерминантов и рангов. Заметим, что эта система может быть записана в виде

$$\|A\| \cdot \|X\| = \|B\|, \tag{2.2.2}$$

где

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|, \quad \|X\| = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right\|, \quad \|B\| = \left\| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{array} \right\|.$$

Договоримся матрицу $\|A\|$, элементами которой служат коэффициенты при неизвестных в системе (2.2.1), называть *основной* матрицей этой системы. В дальнейшем нам также понадобится матрица $\|A|B\|$, которая получается из основной приписыванием к ней справа столбца свободных членов $\|B\|$. Матрицу $\|A|B\|$ принято называть *расширенной* матрицей системы линейных уравнений.

В случае, когда матрица $\|A\|$ обратима, умножая обе части матричного уравнения (2.2.2) слева на $\|A\|^{-1}$, получим

$$\|A\|^{-1} \cdot \|A\| \cdot \|X\| = \|A\|^{-1} \cdot \|B\|$$

или

$$\|X\| = \|A\|^{-1} \cdot \|B\|, \tag{2.2.3}$$

поскольку

$$\|A\|^{-1} \cdot \|A\| = \|E\| \quad \text{и} \quad \|E\| \cdot \|A\| = \|A\|.$$

Однако, хотя формулы (2.2.1) и (2.2.3) по структуре аналогичны известным из курса элементарной алгебры формулам $ax = b$ и $x = a^{-1}b$ для линейного уравнения с одним неизвестным, их практическое использование не целесообразно, поскольку решение системы (2.2.1) с n неизвестными сводится в этом случае к задаче, имеющей (в силу определения 2.1.2.6) n^2 неизвестных. Существенно более эффективным методом решения систем линейных уравнений является алгоритм Крамера-Гаусса, принцип действия которого рассмотрим на примере системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2, \end{cases} \tag{2.2.4}$$

решением которой служит любая упорядоченная пара чисел $\{x_1,\ x_2\}$, а во введенных ранее обозначениях

$$\|A\| = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|, \quad \|X\| = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|, \quad \|B\| = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} \right\|.$$

Получим два следствия из уравнений данной системы, каждое из которых будет содержать только по одному из неизвестных x_1 и x_2. Для этого сначала вычтем из первого уравнения, умноженного на a_{22}, второе, умноженное на a_{12}, что даст

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

затем из первого уравнения, умноженного на a_{21}, вычтем второе, умноженное на a_{11}, и получим

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_1a_{21} - b_2a_{11}.$$

Заметим, что оба полученных равенства, которые удовлетворяются любыми решениями системы (2.2.4), можно переписать в виде

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \qquad \text{и} \qquad \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \qquad\qquad (2.2.5),$$

где

$$\Delta = \det \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|, \quad \Delta_1 = \det \left\| \begin{matrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{matrix} \right\|, \quad \Delta_2 = \det \left\| \begin{matrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{matrix} \right\|.$$

и исследуем соотношения (2.2.5) в предположении, что на значения параметров $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}$, и $b_1,\ b_2$ не налагается никаких ограничений.

1°. Если $\Delta \neq 0$, существует единственная пара чисел x_1 и x_2, удовлетворяющая равенствам (2.2.5) вида $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ и $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что эта пара чисел удовлетворяет и системе (2.2.4) Следовательно, при $\Delta \neq 0$ система линейных уравнений (2.2.4) имеет решение и притом единственное.

2°. Если $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$, то соотношения (2.2.5) не удовлетворяются ни при каких значениях x_1 и x_2. Значит, в этом случае система линейных уравнений (2.2.4) решений не имеет.

3°. Наконец, если $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то соотношения (2.2.5) будут удовлетворяться любой парой чисел x_1 и x_2. В этом случае система (2.2.4) имеет бесчисленное множество решений, поскольку коэффициенты ее уравнений оказываются пропорциональными.

Таким образом, можно утверждать следующее (это утверждение называется **теоремой Крамера**).

> Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет решение и притом единственное, тогда и только тогда, когда $\det\|A\| \neq 0$.

Поскольку теорема Крамера справедлива в общем случае для системы n линейных уравнений с n неизвестными, то применим ее для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

Пример 2.2.1. Решить систему:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. Вначале составим основную матрицу (то есть матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных) этой системы и найдем ее определитель, например "методом треугольников"

$$\det\|A\| = \det\begin{Vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{Vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot(-1)\cdot(-2)+1\cdot 2\cdot 2+(-1)\cdot 3\cdot 1-(-1)\cdot(-1)\cdot 2-1\cdot 3\cdot(-2)-(-2)\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= -4+4-3-2+6+4 = 5 \neq 0.$$

Полученный результат означает, что система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}\,, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}\,, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}\,,$$

где $\Delta = \det\|A\| = 5$, а числа Δ_1, Δ_2 и Δ_3 согласно теореме Крамера равны

$$\Delta_1 = \det\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{Vmatrix} = -5\,; \quad \Delta_2 = \det\begin{Vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{Vmatrix} = -10\,;$$

$$\Delta_3 = \det\begin{Vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{Vmatrix} = -5\,.$$

Напомним, что матрицы для определителей Δ_1, Δ_2 и Δ_3 получаются из матрицы

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{rrr} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{array} \right\|$$

последовательной заменой ее столбцов на $\|B\| = \left\| \begin{array}{r} 1 \\ -3 \\ -2 \end{array} \right\|$ – столбец правых частей решаемой системы уравнений.

Подставив найденные значения чисел Δ_1, Δ_2 и Δ_3 , получим, что

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1 \, , \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{5} = -2 \, , \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1 \, .$$

Рассмотрим теперь случай системы m линейных уравнений с n неизвестными вида

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. \tag{2.2.6}$$

при произвольном соотношении между натуральными числами m и n.

Столбец неизвестных, столбец свободных членов, основная и расширенная матрицы в этом случае соответственно будут иметь вид

$$\|X\| = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right\| , \quad \|B\| = \left\| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{array} \right\| , \quad \|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| ,$$

$$\|A|B\| = \left\| \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_m \end{array} \right\| .$$

Условие разрешимости системы линейных уравнений (2.2.6) (то есть, существования решения) дается следующей теоремой (носящей название **теоремы Кронекера-Капелли**).

> Для того,чтобы система m линейных уравнений с n неизвестными имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы равнялся рангу расширенной матрицы.

Или, во введенных ранее обозначениях, $\mathrm{rg}\,\|A\| = \mathrm{rg}\,\|A|B\|$.

Метод решения системы (2.2.6) основан на теореме, утверждающей, что максимальное число независимых уравнений этой системы равно $\mathrm{rg}\,\|A\|$, и (в случае, если она совместна) состоит в следующих, последовательно выполняемых действиях:

1° - отбрасывании зависимых уравнений;

2° - разделении всех неизвестных на две группы: *основные* и *свободные*, к первым из которых(общим числом $\operatorname{rg}\|A\|$), оказывается применимой теорема Крамера, а значения вторых могут иметь произвольные значения;

3° - построении *упрощенной* системы и ее решении по правилу Крамера, то есть, выражении основных неизвестных через свободные.

Пример 2.2.2. Проиллюстрируем использование данного метода на примере задачи: исследовать на совместность и найти все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 7x_4 & + & x_5 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{cases}$$

или в матричном виде

$$\left\| \begin{matrix} 3 & 2 & 1 & -7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|.$$

Решаемая система линейных уравнений есть частный случай системы (2.2.6) с $m = 2$ и $n = 5$. Найдем ранги ее основной и расширенной матриц.

$$\|A|B\| = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 & 1 & -7 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 & | & 0 \end{matrix} \right\|$$

Во-первых, очевидно, что ранг основной матрицы не меньше, чем 1, поскольку в матрице есть элементы с ненулевыми значениями, и не больше, чем 2, так как число строк матрицы $m = 2$. Поэтому достаточно подсчитать значения всех миноров второго порядка и выяснить, имеется ли среди них хотя бы один отличный от нуля. Таких миноров в основной матрице 24, и, например, минор, в матрицу которого входят первые два столбца, не равен 0. Действительно,

$$\det \left\| \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 \neq 0.$$

Значит, для данной системы линейных уравнений $\operatorname{rg}\|A\| = 2$. С другой стороны, ранг расширенной матрицы $\operatorname{rg}\|A|B\|$ также равен 2, поскольку столбец правых частей системы содержит только нули. Следовательно, система совместна – она имеет решение.

Отметим, что для данной системы уравнений к заключению о ее совместности можно было придти и без теоремы Кронекера-Капелли, так как у нее есть очевидное решение: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Подобная ситуация будет иметь место для любой однородной системы линейных уравнений, то есть в случае, когда правые части всех уравнений равны нулю.

Однако применение теоремы Кронекера-Капелли необходимо, поскольку ранг расширенной матрицы также показывает какое максимальное число независимых уравнений содержит решаемая система. Зависимые же уравнения можно не принимать во внимание. В нашем случае

$$\operatorname{rg}\|A\| = \operatorname{rg}\|A|B\| = 2 = m,$$

и, согласно пункту 1°, оба уравнения следует оставить в системе.

При выполнении пункта 2° вначале следует определить сколько основных и сколько свободных неизвестных имеет система. В нашем случае число основных неизвестных равно $\mathrm{rg}\,\|A\| = 2$ – максимальному числу независимых уравнений, ибо правило Крамера применимо для систем, в которых число неизвестных равно числу уравнений. Число же свободных неизвестных, таким образом, оказывается равным $n - \mathrm{rg}\,\|A\| = 5 - 2 = 3$.

Теперь из имеющихся в исходной системе пяти неизвестных надо выбрать два в качестве основных. В общем случае *не любая* пара неизвестных для этого годится. Выбор должен позволить применение теоремы Крамера, то есть детерминант основной матрицы упрощенной системы (получающейся после переноса свободных неизвестных в правую часть уравнений) не должен быть равен нулю. В нашем случае, например, пара x_1 и x_2 отвечает этому требованию, а пара x_3 и x_5 – нет.

Если принять за основные неизвестные первую пару, то упрощенная система будет иметь вид:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & = & - & x_3 & + & 7x_4 & - & x_5, \\ x_1 & + & x_2 & = & - & x_3 & + & 4x_4 & - & x_5. \end{array}\right.$$

Присвоим свободным неизвестным произвольные фиксированные значения:

$$x_1 = t\ , \quad x_2 = q\ , \quad x_1 = q\ .$$

Теперь значения основных неизвестных однозначно находятся из упрощенной системы. Например, по формулам Крамера или почленным вычитанием удвоенного второго уравнения из первого

$$\left\{\begin{array}{rcrrcrcr} x_1 & = & & t & - & p & + & q, \\ x_2 & = & - & 2t & + & 5p & - & 2q. \end{array}\right.$$

Следовательно, решение исходной системы линейных уравнений в развернутой форме может быть записано в виде

$$\left\{\begin{array}{rcrrcrcr} x_1 & = & & t & - & p & + & q, \\ x_2 & = & - & 2t & + & 5p & - & 2q, \\ x_3 & = & & t, & & & & \\ x_4 & = & & & & p, & & \\ x_5 & = & & & & & & q, \end{array}\right. \qquad \forall t,\ p,\ q.$$

Последние формулы можно записать при помощи матричных операций как

$$\left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{rrcrcr} & t & - & p & + & q \\ - & 2t & + & 5p & - & 2q \\ & t & & & & \\ & & & p & & \\ & & & & & q \end{array}\right\|$$

или

$$\left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right\| = t \cdot \left\|\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\| + p \cdot \left\|\begin{array}{r} -1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right\| + q \cdot \left\|\begin{array}{r} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right\| \qquad \forall t,\ p,\ q.$$

Пример 2.2.3. Рассмотрим еще один пример: исследовать на совместность и найти все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 3x_2 & - & 6x_3 & = & -6 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -2 \end{cases} \tag{2.2.7}$$

или в матричном виде

$$\left\| \begin{matrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ -6 \\ 4 \\ -2 \end{matrix} \right\|.$$

Обратите внимание на размеры матриц в данной форме записи системы уравнений.

Очевидно, что система (2.2.7) есть частный случай системы (2.2.6) с $m = 5$ и $n = 3$. Построим для этой системы расширенную матрицу $\|A|B\|$ и найдем как ее ранг, так и ранг основной матрицы $\|A\|$. Имеем

$$\|A|B\| = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 & 2 & | & 3 \\ 1 & -1 & 2 & | & 2 \\ -3 & 3 & -6 & | & -6 \\ 2 & -2 & 4 & | & 4 \\ -1 & 1 & -2 & | & -2 \end{matrix} \right\|$$

Несложно заметить, что как в основной, так и в расширенной матрицах третья строка есть вторая умноженная на -3. Это означает, что третье уравнение системы (2.2.7) является следствием второго уравнения и его надо удалить из списка независимых уравнений. Аналогично к зависимым следует отнести также четвертое и пятое уравнения, поскольку они могут быть получены умножением второго уравнения соответственно на 2 и -1.

С другой стороны, в первых двух строках расширенной матрицы, в столбцах один и два расположена квадратная подматрица второго порядка

$$\left\| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\|,$$

определитель которой $\det \left\| \begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\| = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = -1 \neq 0$. А это означает, что $\operatorname{rg}\|A\| = \operatorname{rg}\|A|B\| = 2$ и, следовательно, система (2.2.7) совместна, то есть она имеет решение.

Найдем эти решения по схеме 1°–3°. После удаления зависимых уравнений, система примет вид

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \end{cases} \tag{2.2.8}$$

Теперь следует разделить неизвестные на основные и свободные. Число основных неизвестных должно быть $\operatorname{rg}\|A\| = 2$, однако не любая пара неизвестных годится для использования в качестве основных. Напомним: для этой пары неизвестных должна быть применимой теорема Крамера. Другими словами, минор основной матрицы не должен равняться нулю. В нашем примере за основные неизвестные можно выбрать пары $\{x_1, x_2\}$ или $\{x_1, x_3\}$, но не $\{x_2, x_3\}$, так как для последней пары соответствующий минор равен $\det \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = -1 \neq 0.$

Примем за основные неизвестные пару $\{x_1, x_2\}$, а неизвестное x_3 за свободное, значение которого t произвольно. Тогда система (2.2.8) может быть записана в виде

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & = & 3 & - & 2t, \\ x_1 & - & x_2 & = & 2 & - & 2t, \end{array} \right. \tag{2.2.9}$$

где $x_3 = t, \quad t \in (-\infty, +\infty).$

Решим систему (2.2.9) по схеме Крамера. Для этого предварительно найдем Δ, Δ_1 и Δ_2.

$$\Delta = \det \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = -1;$$

$$\Delta_1 = \det \begin{Vmatrix} (3-2t) & -1 \\ (2-2t) & -1 \end{Vmatrix} = (3-2t) \cdot (-1) - (2-2t) \cdot (-1) = -1;$$

$$\Delta_2 = \det \begin{Vmatrix} 2 & (3-2t) \\ 1 & (2-2t) \end{Vmatrix} = 2 \cdot (3-2t) - 1 \cdot (2-2t) = 1 - 2t.$$

Теперь, учитывая, что $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1$ и $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2t - 1$ (по теореме Крамера), можно получить ответ задачи: все решения системы линейных уравнений (2.2.8) описываются формулами

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & 1, \\ x_2 & = & 2t - 1, \qquad t \in (-\infty, +\infty) \\ x_3 & = & t. \end{array} \right.$$

или, при помощи операций с матрицами,

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix} + t \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}, \qquad t \in (-\infty, +\infty)$$

2.3 Иллюстративный пример "Задача о жуках"

Продемонстрируем использование матричных операций и систем линейных уравнений на примере следующей задачи.

Рассматривается колония жуков определенного вида, средой обитания которых при нормальных условиях может быть одна из трех следующих: "на берегу", "в воздухе" и "на воде". Последовательно проводимые наблюдения показали, что:

- жук, находящийся "на берегу", при последующем наблюдении, остается "на берегу" в тридцати процентах случаев, в сорока процентах случаев обнаруживается "в воздухе ", и, наконец, в тридцати процентах случаев оказывается "на воде" ;
- жук, находящийся "в воздухе", при последующем наблюдении оказывается "на берегу" в половине всех случаев, обнаруживается "в воздухе" в одной десятой части случаев или находится "на воде" в двух пятых случаев;
- жук, находящийся "на воде", при последующем наблюдении обнаруживается "на берегу" в двух пятых всех случаев, находится "в воздухе " в одной пятой случаев или оказывается "на воде" в двух пятых случаев.

В предположении, что полная численность колонии жуков постоянна, требуется найти:

1) распределение жуков по средам обитания, если предшедствующее наблюдение показало, что "на берегу"находилось 30% жуков, "в воздухе" - 10% жуков, а "на воде" 60%.
2) распределение жуков по средам обитания, предшедствующее наблюдению, которое показало, что "на берегу"находилось 45% жуков, "в воздухе" - 15% жуков, а "на воде" 40%.

Решение: 1) пусть упорядоченная тройка чисел $\{x_1, x_2, x_3\}$ есть исходное распределение жуков по средам обитания: "на берегу", "в воздухе " и соответственно "на воде" (в процентах), а тройка чисел $\{y_1, y_2, y_3\}$ является искомым аналогичным распределением.

Связь между исходным и искомым распределением, как нетрудно заметить, дается формулами:

$$\begin{array}{l} y_1 = 0.3 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_2 + 0.4 \cdot x_3 \\ y_2 = 0.4 \cdot x_1 + 0.1 \cdot x_2 + 0.2 \cdot x_3 \\ y_3 = 0.3 \cdot x_1 + 0.4 \cdot x_2 + 0.4 \cdot x_3 \end{array} \qquad (2.3.1)$$

Действительно, например y_2 - процентная доля жуков "в воздухе " образуется из:

- доли жуков бывших "на берегу" и взлетевших "в воздух" (которых, согласно условию задачи 40% от x_1),
- доли жуков бывших "в воздухе"и там же оставшихся (а таких, согласно условию задачи 10% от x_2),
- и, наконец, доли жуков бывших "на воде" и оттуда взлетевших "в воздух" (таких, согласно условию задачи 20% от x_3).

Просуммировав эти три доли, мы и получаем искомое значение для y_2. Величины y_1 и y_3 находятся аналогично.

Теперь, подставив в соотношения (2.3.1) данные в условии задачи значения $x_1 = 10\%, x_2 = 65\%$ и $x_3 = 25\%$, получим путем несложных арифметических вычислений ответ на первый вопрос задачи: $y_1 = 45.5\%, y_2 = 15.5\%$ и $y_3 = 39\%$.

Заметим, что упорядоченные тройки чисел, задающие распределение жуков по средам обитания, можно записать в виде трехкомпонентных столбцов

$$\|X\| = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\|; \quad \|Y\| = \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right\|,$$

а доли, характеризующие изменение среды обитания жуков, в виде матрицы

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{ccc} 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{array} \right\|.$$

Обратите внимание, что строки этой матрицы соответствуют среде, в которой жук находился, а столбцы - среде в которую он переместился.

Теперь, согласно определению операции произведения матриц - 1.1.2.5, соотношения (2.3.1) можно записать как $\|Y\| = \|A\| \cdot \|X\|$ или в развернутом виде

$$\left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\|. \qquad (2.3.2)$$

Отметим сразу, что, так же как и соотношения (1.1.5.1) эта формула позволяет получить ответ на вопросы задачи. Действительно, если в (1.1.4.11) подставить $x_1 = 10\%, x_2 = 65\%$ и $x_3 = 25\%$, то мы получим согласно определению 1.1.2.5.

$$\left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} 10 \\ 65 \\ 25 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 45.5 \\ 15.5 \\ 39.0 \end{array} \right\|,$$

что естественно совпадает с ответом на первый вопрос задачи, полученным нами по формулам (2.3.1.)

Получим теперь ответ на второй вопрос задачи. Нам снова необходимо решить уравнение $\|Y\| = \|A\| \cdot \|X\|$, но только теперь неизвестным будет столбец $\|X\|$, в то время как столбец $\|Y\|$ задан и имеет компоненты $y_1 = 45\%, y_2 = 15\%$ и $y_3 = 40\%$.

Для нахождения $\|X\|$ вполне возможно подставить значения компонентов столбца $\|Y\|$ в соотношения (2.3.1) и попытаться решить полученную систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными, например, методом исключения, который был рассмотрен в начале данного параграфа. Однако возможен и другой подход, основанный на том факте, что согласно определению 1.1.3.2.

$$\det \|A\| = \det \left\| \begin{array}{ccc} 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{array} \right\| = -0.01 \neq 0, \qquad (2.3.3)$$

а это, в свою очередь, означает что матрица $\|A\|$ имеет обратную, которая равна

$$\|A\|^{-1} = \left\| \begin{array}{ccc} 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{array} \right\|^{-1} = \left\| \begin{array}{rrr} 4 & 4 & -6 \\ 10 & 0 & -10 \\ -13 & -3 & 17 \end{array} \right\|.$$

Этот результат мы приводим без доказательства, однако рекомендуем самостоятельно проверить справедливость равенств (2.3.3), а также соотношений $\|A\|^{-1} \cdot \|A\| = \|A\| \cdot \|A\|^{-1} = \|E\|$, где $\|E\|$ *единичная* матрица (см. п. 1.1.1.)

Как было показано ранее в данном параграфе, если $\det\|A\| \neq 0$, то уравнение $\|A\| \cdot \|X\| = \|Y\|$ равносильно уравнению $\|X\| = \|A\|^{-1} \cdot \|Y\|$, или в развернутом виде

$$\left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{array} \right\|^{-1} \cdot \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{array} \right\|.$$

После подстановки конкретных значений для компонентов матрицы $\|A\|^{-1}$ и столбца $\|Y\|$, и выполнения операции умножения матриц, получим

$$\left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{rrr} 4 & 4 & -6 \\ 10 & 0 & -10 \\ -13 & -3 & 17 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} 45 \\ 15 \\ 40 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{r} 0 \\ 50 \\ 50 \end{array} \right\|.$$

То есть ответ на второй вопрос задачи будет таким: во время предшествовашего наблюдения "на берегу" жуков не было, а "в воздухе" и "на воде" находилось по 50% состава колонии.

2.4 Собственные векторы и собственные значения квадратных матриц

При решении большого числа задач в прикладных разделах математики, включая и математическую статистику, возникает так называемая "задача на собственные значения", имеющая следующую постановку.

Пусть дана квадратная, порядка n матрица $\|A\|$ вида

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|.$$

Определение 2.4.1. **Собственным вектором** квадратной матрицы $\|A\|$ называется *ненулевой* n-компонентный столбец $\|X\|$ такой, что выполнено равенство

$$\|A\| \cdot \|X\| = \lambda\,\|X\|\,, \tag{2.4.1}$$

где λ – некоторое число, называемое **собственным значением** матрицы $\|A\|$.

Принято говорить, что в случае выполнения равенства (2.4.1), собственный вектор $\|X\|$ *отвечает* собственному значению λ, а собственное значение λ *отвечает* собственному вектору $\|X\|$. "Задача на собственные значения"заключается в отыскании для данной квадратной матрицы $\|A\|$ всех ее собственных векторов и отвечающих им собственных значений λ.

Пусть столбец $\|X\|$ представим в развернутой форме как

$$\|X\| = \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right\| .$$

Тогда равенство (2.4.1) имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right\| = \lambda \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \right\| . \tag{2.4.2}$$

Если выполнить все операции с матрицами как в левой, так и в правой части данного равенства, то мы придем к системе уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & \lambda x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & \lambda x_n \end{array} \right. \tag{2.4.3}$$

Таким образом, решение задачи на собственные значения сводится к отысканию всех $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и всех чисел λ, удовлетворяющих уравнениям системы (2.4.3). Отметим, что эта система n *нелинейных* уравнений с $n+1$ неизвестным, поскольку неизвестными являются все $x_1, x_2, \dots, x_n$ и λ, а каждое из ее уравнений содержит *произведение* λ на одно из неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Решим задачу на собственные значения методом, который не зависит от значения n, и потому ограничимся случаем $n = 2$. В этом случае система (2.4.3) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & \lambda x_2 \end{array} \right.$$

Преобразуем ее к виду

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} (a_{11} - \lambda)x_1 & + & a_{12}x_2 & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & (a_{22} - \lambda)x_2 & = 0 \end{array} \right. \tag{2.4.4}$$

Предположим, что собственное значение λ является параметром в системе (2.4.4), то есть его значение фиксировано, хотя и остается пока не известным. Тогда эту систему можно рассматривать как систему линейных уравнений с неизвестными $\{x_1, x_2\}$.

Легко видеть, что поскольку эта система однородная (правые части всех ее уравнений равны нулю), она имеет решение $x_1 = x_2 = 0$. Однако столбец

$$\|X\| = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\| .$$

не может быть собственным вектором, поскольку последний должен быть ненулевым. С другой стороны, по теореме Крамера система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель ее основной матрицы отличен от нуля. Значит, если определитель матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных в системе (2.4.4), отличен от нуля, решение у этой системы единственное и притом нулевое. Следовательно, задача на собственные значения в этом случае не имеет решений.

Если же определитель основной матрицы системы (2.4.4) равен нулю, то, как было показано в §2.1.4, решений либо вовсе нет, либо их неограничено много. А поскольку нулевое решение у системы (2.4.4), то равенство нулю определителя основной матрицы – достаточное условие существования ненулевых решений, то есть собственных векторов.

Получим теперь условие, гарантирующее равенство нулю определителя основной матрицы системы (2.4.4). Это условие имеет вид

$$\det \left\| \begin{array}{cc} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{array} \right\| = 0.$$

или $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0$. Откуда получаем, что значения параметра λ, для которых система (2.4.4) имеет ненулевые решения x_1 и x_2, должны быть корнями квадратного уравнения вида

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0, \qquad (2.4.5)$$

называемого *характеристическим.*

Таким образом решение задачи на собственные значения для квадратной матрицы второго порядка сводится к следующей последовательности действий.

1) Составляется и решается характеристическое уравнение (2.4.5). Квадратное уравнение, как известно, может иметь два различных корня, иметь один корень, либо не иметь решений вовсе. Если корней нет, то решение задачи на собственные значения завершается констатацией факта их отсутствия.

2) Если корни имеются, то для *каждого* из них решается система (2.4.4) и находятся все ненулевые решения, которые и являются искомыми собственными векторами.

Пример 2.4.1. Решить задачу на собственные значения для матрицы

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right\|.$$

Решение:
1) Характеристическое уравнение будет

$$\det \left\| \begin{array}{cc} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{array} \right\| = 0.$$

или $\lambda^2-4\lambda+3=0$. Его корни $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=3$.
2) Для собственного значения $\lambda_1=1$ система (2.4.4) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1 & + & x_2 & =0 \\ x_1 & + & x_2 & =0 \end{array} \right. ,$$

решением которой будет столбец вида $\|X\| = \left\| \begin{array}{c} t \\ -t \end{array} \right\|$, где t – любое число. Следовательно собственному значению $\lambda_1 = 1$ будет отвечать собственный вектор $\|X\| = t \left\| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\|$ при любом $t \neq 0$.

Аналогично получаем, что для собственного значения $\lambda_2 = 3$ система (2.4.4) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} -x_1 & + & x_2 & = 0 \\ x_1 & + & -x_2 & = 0 \end{array} \right. ,$$

решением которой будет столбец вида $\|X\| = \left\| \begin{array}{c} t \\ t \end{array} \right\|$, где t – любое число. Следовательно собственному значению $\lambda_2 = 3$ будет отвечать собственный вектор $\|X\| = t \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right\|$ при любом $t \neq 0$.

Пример 2.4.2. Решить задачу на собственные значения для матрицы

$$\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Решение:
1) Характеристическое уравнение будет

$$\det \left\| \begin{array}{cc} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{array} \right\| = 0.$$

или $(1-\lambda)^2 = 0$. У него корень единственный: $\lambda = 1$.
2) Для собственного значения $\lambda = 1$ система (2.4.4) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{rcrl} 0x_1 & + & x_2 & = 0 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & = 0 \end{array} \right. ,$$

решением которой будет столбец вида $\|X\| = \left\| \begin{array}{c} t \\ 0 \end{array} \right\|$, где t – любое число. Следовательно собственному значению $\lambda = 1$ будет отвечать собственный вектор $\|X\| = t \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\|$ при любом $t \neq 0$.

Пример 2.4.3. Решить задачу на собственные значения для матрицы $\|A\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array} \right\|$.

Решение:
1) Характеристическое уравнение будет

$$\det \left\| \begin{array}{cc} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{array} \right\| = 0.$$

или $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, которое корней не имеет. Следовательно, данная матрица не имеет собственных значений и собственных векторов.

Иногда задачу нахождения собственных значений удается решить более просто, используя специфический вид матрицы $\|A\|$. Например, заметим, что характеристическое уравнение (2.4.5) можно записать в виде

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det \|A\| = 0.$$

Тогда в случае $\det \|A\| = 0$ очевидно, что $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = a_{11} + a_{22}$.

Вернемся теперь к "задаче о жуках" и выясним существует ли распределение числа жуков по средам обитания, которое не будет меняться от наблюдения к наблюдению, то есть будет стационарным.

Математически условие стационарности

$$\|X\| = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}$$

– некоторого состояния колонии жуков с матрицей, характеризующей их поведение, вида

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{Vmatrix}.$$

может быть записано как $\|A\| \cdot \|X\| = \lambda \|X\|$ или в развернутой форме

$$\begin{Vmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \lambda \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}. \tag{2.4.6}$$

Таким образом, мы пришли к задаче вида (2.4.1), которой надо найти *собственный вектор* матрицы $\|A\|$, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$. Решим эту задачу, приняв для определенности общую численность колонии жуков равной 238.

Проверим вначале, что $\lambda = 1$ является собственным значением матрицы $\|A\|$. Это условие, как было показано выше, имеет вид

$$\det\left(\|A\| - \lambda \|E\|\right) = 0.$$

В нашем случае

$$\det\left(\begin{Vmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{Vmatrix} - 1 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}\right) = \det \begin{Vmatrix} -0.7 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & -0.9 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & -0.6 \end{Vmatrix} =$$

$$= 10^{-3} \det \begin{Vmatrix} -7 & 5 & 4 \\ 4 & -9 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{Vmatrix} =$$

используя правило "треугольников"для подсчета значения определителя

$$= 10^{-3} \cdot \Big((-7)\cdot(-9)\cdot(-6) + 5\cdot 2\cdot 3 + 4\cdot 4\cdot 4 - 4\cdot(-9)\cdot 3 - 5\cdot 4\cdot(-6) - (-7)\cdot 2\cdot 4\Big) =$$

$$= -378 + 30 + 64 + 108 + 56 + 120 = -378 + 378 = 0\ .$$

Найдем теперь решение матричного уравнения (2.4.6) с $\lambda = 1$ Запишем (2.4.6) в развернутом виде

$$\left\{ \begin{array}{lllllll} 0.3x_1 & + & 0.5x_2 & + & 0.4x_3 & = & x_1, \\ 0.4x_1 & + & 0.1x_2 & + & 0.2x_3 & = & x_2, \\ 0.3x_1 & + & 0.4x_2 & + & 0.4x_3 & = & x_3, \end{array} \right.$$

или

$$\begin{cases} -0.7x_1 & + & 0.5x_2 & + & 0.4x_3 & = & 0, \\ 0.4x_1 & + & -0.9x_2 & + & 0.2x_3 & = & 0, \\ 0.3x_1 & + & 0.4x_2 & + & -0.6x_3 & = & 0. \end{cases} \tag{2.4.7}$$

Нам нужно найти *ненулевое* решение системы линейных уравнений (2.4.7.) Заметим, что существование для нее ненулевого решения гарантирует равенство (что было показано выше) нулю определителя ее основной матрицы

$$\det \begin{Vmatrix} -0.7 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & -0.9 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & -0.6 \end{Vmatrix} = 10^{-3} \det \begin{Vmatrix} -7 & 5 & 4 \\ 4 & -9 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{Vmatrix} = 0.$$

Найдем это решение, заменив последнее уравнение в системе (2.4.7.) на условие $x_1 + x_2 + x_3 = 238$, означающее, что общее число жуков остается постоянным. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} -0.7x_1 & + & 0.5x_2 & + & 0.4x_3 & = & 0, \\ 0.4x_1 & + & -0.9x_2 & + & 0.2x_3 & = & 0, \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 238, \end{cases} \tag{2.4.8}$$

решение которой – искомое стационарное распределение числа жуков по средам обитания, имеет вид

$$\|X\| = \begin{Vmatrix} 92 \\ 60 \\ 86 \end{Vmatrix}.$$

Проверьте самостоятельно, что определитель основной матрицы системы (2.4.8) отличен от нуля, и следовательно, в силу теоремы Крамера, найденное стационарное распределение числа жуков по средам обитания *единственное.*

Глава 3

Функции, последовательности и пределы

3.1 Определение функции

На практике достаточно часто приходится иметь дело с так называемыми *переменными величинами*, то есть численными характеристиками, могущими принимать различные значения. Такие количественные характеристики принято называть просто *переменными*. Например, для описания конкретного человека можно использовать переменные: возраст, рост, вес, коэффициент интеллекта IQ и т.п. При этом нередко оказывается, что значения одной переменной связаны некоторым образом со значениями другой. Скажем, вес человека зависит от его роста, рост – от возраста, обменный курс валюты – от времени и т.д.

В некоторых, вообще говоря довольно не частых случаях зависимость одной переменной величины от другой оказывается *однозначной*, то есть для каждого допустимого значения второй переменной значение первой существует и единственно. Например, площадь круга однозначно зависит от его радиуса, возраст человека имеет единственное значение в каждый момент времени, масса единицы объема жидкости однозначно определяется ее плотностью.

Зависимости между переменными величинами, обладающие такими свойствами, принято называть *функциональными*. Они являются объектом изучения математического анализа - раздела курса высшей математики, и играют важную роль в большом числе теоретических и прикладных дисциплин, включая теорию вероятностей и математическую статистику.

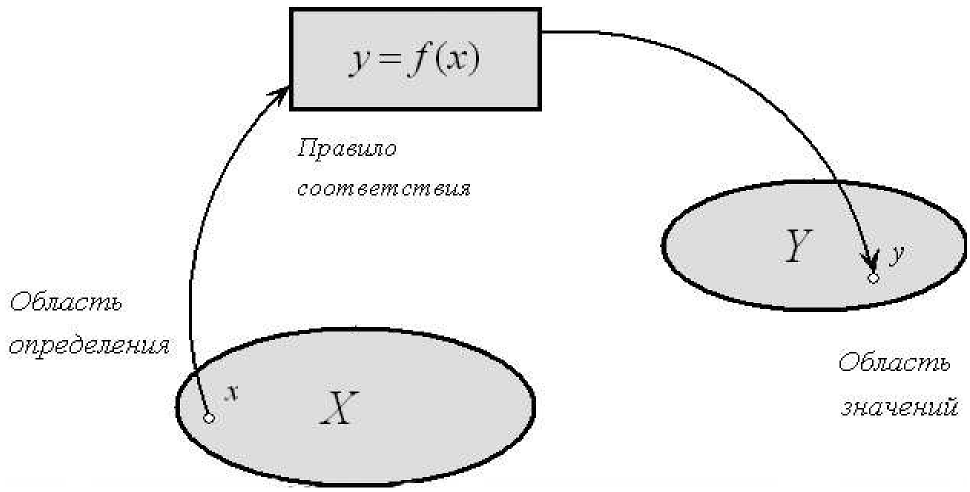


Рис. 3.1: Определение функциональной зависимости

Определение 3.1.1. Будем говорить, что задана *функциональная зависимость* или просто *функция*, если указано **правило**, по которому **каждому** числу x, принадлежащему числовому множеству X, поставлено в соответствие **единственное** число y, принадлежащему числовому множеству Y.

Множество X принято называть *областью определения* функции, а множество - областью ее значений. Саму функцию принято обозначать

$$y = f(x), \ x \in X, \ y \in Y.$$

Наконец, x - независимая переменная, называется *аргументом*, а y - зависимая переменная, *значением функции* или, просто, *функцией.*

Схематически функциональную зависимость можно представить как объект состоящий из трех компонентов: области определения, области значений и правила, по которому каждому числу из множества определения поставлено в соответствие единственное число из области значений. (См. рис. 3.1). Как область определения, так и область значения – это числовые множества. Правило соответствия может иметь различные формы представления: в виде таблицы, математической формулы, графика или являться некоторой математической задачей отыскания y по значению x . Наконец, это правило может быть просто описано словесно.

Следует иметь в виду, что достаточно часто функцию задают только формулой соответствия. В этом случае *предполагается*, что областью определения является множество чисел, для которых выполнимы все использованные в записи этой формулы операции. За область значений при этом принимается множество чисел, являющихся значениями функции соответствующие *всем возможным* значениям аргумента.

В соответствии с этим соглашением, можно сказать, что область определения X, например, функции $y = \sqrt{x-3}$, составляют все действительные числа не меньшие, чем 3, поскольку извлечь арифметический квадратный корень (согласно его определению!) можно только из неотрицательного числа. Множество значений Y согласно этому же определению содержит все неотрицательные числа. Символически это можно записать в виде:

$$X : \{\forall x \geq 3\},\ Y : \{\forall x \geq 0\} \text{ или же } X : \{[3, +\infty)\},\ Y : \{[0, +\infty)\}.$$

Заметим, что задача построения области определения и области значений не всегда оказывается столь тривиальной. Поясним это обстоятельство следующими примерами.

Пример 3.1.1. Найти область определения и область значений для функций:

а) $y = \sqrt{\dfrac{2x+3}{x-2}}$

Область определения: решив неравенство $\dfrac{2x+3}{x-2} \geq 0$, получим $\left[\begin{array}{l} x \leq -\frac{3}{2} \\ x > 2, \end{array}\right.$ то есть,

$$X : \left\{(-\infty, -\frac{3}{2}] \bigcup (2, +\infty)\right\} ,$$

поскольку извлечение квадратного корня возможно только из неотрицательного числа. Отметим также, что число 2 не принадлежит области определения, поскольку при таком значении x знаменатель подкоренного выражения обратится в 0 , а деление на нуль невозможно.

Область значений: чтобы найти область значений, рассмотрим формулу $y = \sqrt{\dfrac{2x+3}{x-2}}$ как уравнение с неизвестным x и параметром y . Выясним, при каких значениях y существует x – вещественный корень этого уравнения. Несложные выкладки приводят к $x = \dfrac{2y^2+3}{y^2-2}$, что означает существование вещественного x при любых $y \neq \pm 2$. С другой стороны, значение функции в рассматриваемом примере является арифметическим квадратным квадратным корнем и, значит, неотрицательно. Объединив найденные ограничения на величину y , получим, что

$$Y : \left\{[0, 2) \bigcup (2, +\infty)\right\} .$$

б) $y = x + \frac{1}{x}$

Область определения: очевидно $\forall x \neq 0$ или, что то же самое,

$$\left\{(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)\right\}.$$

Область значений: оценку области значений данной функции выполним в два этапа. Сначала рассмотрим случай $x > 0$. Для любых таких значений x будет справедливо неравенство

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geq 0 \text{ , или } \left(x - 2\sqrt{x}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) \geq 0 \text{ , откуда } \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Для случая $x < 0$ оценку области значений можно получить, воспользовавшись равенством

$$(-x) + \frac{1}{(-x)} = -\left(x + \frac{1}{x}\right),$$

из которого в силу неравенства

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \text{ для всех } x > 0$$

имеем

$$x + \frac{1}{x} \leq -2 \text{ для всех } x < 0.$$

Окончательно получаем, что областью значений данной функции является множество $Y : \{(-\infty, -2] \bigcup [2, +\infty)\}$.

в) $y = \dfrac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$

Область определения: находится из условия

$$x^2 + 3x + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \neq -2 \\ x \neq -1, \end{array} \right.$$

поскольку знаменатель дроби не может принимать нулевых значений. Других ограничений на вычисление значений функции нет, поэтому область определения будет

$$X : \Big\{(-\infty, -2) \bigcup (-2, -1) \bigcup (-1, +\infty)\Big\}.$$

Область значений: область значений данной функции удобно находить, используя тот факт, что ее область определения образуется произвольными вещественными числами (за исключением -2 и -1.) Рассмотрим формулу $y = \dfrac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ как уравнение с неизвестной x и решим его, считая y некоторым фиксированным параметром. Для этого преобразуем данное равенство к виду, стандартному для квадратных уравнений

$$(y - 2)x^2 + (3y - 2)x + (2y - 1) = 0 \,, \tag{3.1.1}$$

корни которого определяются формулой

$$x_{1,2} = \frac{-(3y - 2) \pm \sqrt{D}}{2(y - 2)} \quad y \neq 2 \,,$$

где дискриминант $D = (3y - 2)^2 - 4(y - 2)(2y - 1)$. Условие существования вещественных значений x будет $D \geq 0$, или, в нашем случае,

$$(3y - 2)^2 - 4(y - 2)(2y - 1) =$$

$$= y^2 + 8y - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \in \Big\{ \, (-\infty, -2\sqrt{5} - 4] \bigcup [2\sqrt{5} - 4, +\infty) \Big\} \;.$$

Иначе говоря, x может принимать вещественные значения лишь либо при $y \leq -2\sqrt{5} - 4 \approx -8.4$, либо при $y \geq 2\sqrt{5} - 4 \approx 0.4$. Следовательно, область значений данной функции образуют числа y, удовлетворяющие либо первому, либо второму из полученных неравенств и не равные 2.

Наконец заметим, что, хотя приведенные рассуждения не применимы для $y = 2$, ибо в этом случае уравнение (3.1.1) не квадратное, а линейное – вида $4x + 3 = 0$, тем не менее число 2 принадлежит области значений, поскольку у этого линейного уравнения имеется вещественное решение

$x = -\dfrac{3}{4}$, являющееся значением аргумента при котором значение функции равно 2. Следовательно,

$$Y : \left\{ (-\infty, -2\sqrt{5} - 4] \bigcup [2\sqrt{5} - 4, +\infty) \right\} .$$

В заключение обсуждения понятия функциональной зависимости отметим, что функции принято классифицировать по наличию или отсутствую у нее свойства *периодичности* и свойства *четности.*

Определение 3.1.2. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$ такое, что для любого $x \in X$ выполнено $x \pm T \in X$ и $f(x + T) = f(x)$. Число T в этом случае называется *периодом* функции $y = f(x)$.

Пример 3.1.2. К периодическим относятся следующие функции:

$$\begin{array}{ll} y = \sin x & \text{с периодом } T = 2\pi, \\ y = \cos 3x & \text{с периодом } T = \frac{2\pi}{3}, \\ y = \operatorname{tg} x & \text{с периодом } T = \pi. \end{array}$$

Определение 3.1.3. Пусть X – область определения функции $y = f(x)$, симметрична относительно точки $x = 0$, тогда эта функция называется:
четной, если $\forall x \in X$ выполнено $f(-x) = f(x)$,
нечетной, если $\forall x \in X$ выполнено $f(-x) = -f(x)$,

Пример 3.1.3. Классификация функций по четности:

$$\begin{array}{ll} y = x^2 & \text{– четная,} \\ y = x^3 & \text{– нечетная,} \\ y = \sin x & \text{– нечетная,} \\ y = \cos x & \text{– четная,} \\ y = 3^x & \text{– не является ни четной, ни нечетной.} \end{array}$$

Следует иметь в виду, что, хотя существуют функции не относящиеся ни к четным, ни к нечетным, в симметричной области определения каждую их них можно представить как сумму некоторой четной функции и некоторой нечетной. Для этого можно использовать, например, формулу

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} .$$

Так для функции $y = 3^x$ разложение в сумму четной и нечетной будет иметь вид

$$y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2} + \frac{3^x - 3^{-x}}{2} .$$

3.2 Последовательности и их пределы

3.2.1 Числовые последовательности

Будем говорить, что задана *числовая последовательность*, если указано правило, согласно которому каждому натуральному числу (номеру) n поставлено сопоставлено единственное число x_n, называемое значением n-го члена последовательности. Числовую последовательность принято обозначать как $\{x_n\}$.

Согласно этому определению числовую последовательность можно рассматривать как функцию натурального ряда чисел, то есть как функцию, областью определения которой является множество всех натуральных чисел.

Числовую последовательность можно задать одним из следующих трех способов:

1) Перечислением значений ее членов. Например, последовательность $\{x_n\}$, у которой все члены с четными номерами равны 1, а все члены с нечетными -1, может быть представлена в виде $\{-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots\}$
2) Функциональным правилом, которое для каждого члена последовательности позволяет однозначно определить его значение по его номеру. Например, для рассмотренной в 1) последовательности, таким правилом могут быть формулы

$$x_n = (-1)^n \text{ или } x_n = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right).$$

3) Рекурсивным правилом, по которому значение каждого члена последовательности может быть однозначно определено по значению одного или нескольких предыдущих членов. Например, для рассмотренной в 1) последовательности, таким правилом могут служить соотношения

$$x_{n+1} = (-1) \cdot x_n\,, \quad x_1 = -1.$$

3.2.2 Классификация числовых последовательностей

Числовые последовательности принято различать по множеству значений их членов. Например,

– последовательность, все члены которой имеют значение одного знака называется *знакопостоянной*,
– последовательность, все члены которой имеют значение, не превосходящего по модулю некоторого фиксированного числа, называется *ограниченной*.

Заметим, что определение ограниченной последовательности удобно давать, используя логические символы (см. п.9° §1.1.) Например, последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если $\exists C \geq 0 : \forall n : |x_n| \leq C$, то есть, найдется неотрицательное число C такое, что для любого номера n будет выполнено неравенство $|x_n| \leq C$. Если последнее неравенство имеет вид $x_n \leq C$ (или $x_n \geq C$), то говорят об *ограниченной сверху* (или, соответственно, *ограниченной снизу*) числовой последовательности.

Сформулируем теперь определение *неограниченной* числовой последовательности, имея в виду, что *отрицание* некоторого определения должно строиться с соблюдением правил формальной логики. Например, формулировка "не существует число C такое, что ..." не является ошибочной, но для определения она не подходит, ибо нельзя убедиться в том, что это число *не существует* (полный перебор физически не возможен!). Конструктивным вариантом определения неограниченной последовательности может служить, скажем, следующее: последовательность $\{x_n\}$ называется *неограниченной*, если $\forall C \geq 0 : \exists N_C : |x_{N_C}| > C$, то есть, для каждого неотрицательного числа C найдется номер N_C такой, что будет выполнено неравенство $|x_{N_C}| > C$.

Числовые последовательности также можно различать по характеру изменения значений их членов при изменении номера. Например,

– последовательность, в которой изменение номера на 1 меняет знак ее члена на противоположный, называется *знакопеременной,*
– последовательность, для которой при любом n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ называется *монотонно возрастающей,* а в случае выполнения неравенства $x_{n+1} < x_n$ – *монотонно убывающей.*

Поясним данные определения следующими примерами.

1) Числовая последовательность $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ является ограниченной, поскольку $\forall n : \quad 0 \leq x_n < 1$. Кроме того, она будет монотонно возрастающей в силу неравенства

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \quad \forall n.$$

2) Числовая последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$, для которой

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = \frac{1}{3},\ x_4 = 4,\ x_5 = \frac{1}{5},\ x_6 = 6,\ x_7 = \frac{1}{7},\ \ldots,$$

ограничена снизу (числом ноль), не ограничена сверху и не является ни монотонно возрастающей, ни монотонно убывающей.

3.2.3 Предел числовой последовательности и его свойства

Как следует из определения числовой последовательности, для ее описания необходимо указать правило, которое позволяет находить значения ее членов по их номерам. Помимо этого числовая последовательность может характеризоваться также некоторым числом, не связанным ни с каким конкретным номером. Эта характеристика называется пределом числовой последовательности и определяется следующим образом.

Определение 3.2.3.1. Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если *для любого* положительного числа ε *существует* номер N такой, что *для всех* членов последовательности с номерами $n \geq N$ выполнено неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что число A является пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, символически записывается в виде $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Иногда также используется обозначение $\{x_n\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$. Вообще говоря, не всякая числовая последовательность имеет предел. Если числовая последовательность имеет предел, то она называется *сходящейся,* иначе – *расходящейся.*

Пример 3.2.3.1. Числовая последовательность $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$, для которой $x_n = \frac{1}{n}$, имеет предел, равный нулю. То есть, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Докажем это, использовав определение 3.2.1. Заметим во-первых, что данная числовая последовательность является монотонно убывающей, поскольку для любого номера n справедливо неравенство $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, то есть $x_n > x_{n+1}$. С другой стороны,

$$|x_n - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}.$$

Следовательно, для любого заданного положительного числа ε очевидно можно выбрать номер $N > \frac{1}{\varepsilon}$, для которого $\frac{1}{N} < \varepsilon$ и

$$|x_N - 0| = \left|\frac{1}{N} - 0\right| = \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Но тогда, в силу монотонного убывания рассматриваемой последовательности, *для всех* номеров $n \geq N$ также будет верным неравенство

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Значит, число 0 является пределом числовой последовательности $x_n = \frac{1}{n}$.

Последовательности, имеющие своим пределом число 0, то есть, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, принято называть *бесконечно малыми.* Следует также различать случаи последовательностей *расходящихся*, то есть не имеющих никакого предела, и последовательностей *бесконечно больших*, члены которых могут принимать сколь угодно большие, положительные значения. Примером расходящейся может служить последовательность $x_n = (-1)^n$, то есть $\{-1,\ 1, -1,\ 1, -1,\ 1, \ldots\}$, а примером бесконечно большой – последовательность $x_n = n$. Для бесконечно больших последовательностей принято обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Отметим основные, полезные для решения практических задач, свойства числовых последовательностей. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, а C – некоторая константа, тогда

1°. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

2°. $\lim\limits_{n\to\infty} (C \cdot x_n) = C \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

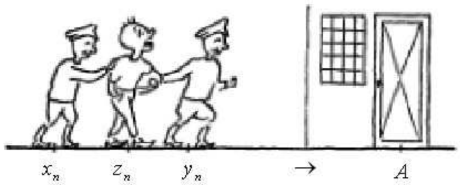


Рис. 3.2: Теорема "О двух милиционерах."

3°. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4°. Если, кроме того $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$.

5°. Если последовательность монотонно возрастает (убывает) и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел.

6°. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ и $\forall n \quad x_n \geq z_n \geq y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$.

Стоит заметить, что студенческий фольклер назвал последнее свойство теоремой "о двух милиционерах"(рис 3.2.)

3.2.4 Нахождение пределов числовых последовательностей

Поиск значения предела числовых последовательностей, основанный лишь на его определении в принципе возможен, но может являться весьма сложной процедурой. На практике оказывается гораздо удобнее использовать свойства пределов последовательностей в сочетании с некоторым небольшим набором пределов, найденных заранее.

В рамках настоящего курса окажется достаточным сочетание набора свойств 1°–6° предыдущего параграфа и трех следующих пределов:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,; \quad \lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Справедливость первого равенства была показана в примере 3.2.3.1. Рассмотрим второе равенство, часто называемое *первым замечательным пределом.*

На тригонометрическом круге единичного радиуса отложим угол, величина которого (в радианной мере) равна $\alpha = \frac{1}{n}$ (рис. 3.3), и построим прямоугольные треугольники OAB и OCD. Заметим, что круговой сектор OAD, с одной стороны, содержит в себе треугольник OAB, а с другой – сам содержится в треугольнике OCD. Это означает, что для *площадей* этих трех фигур справедливы неравенства

$$S_{\triangle \mathrm{OAB}} \leq S_{\cup \mathrm{OAD}} \leq S_{\triangle \mathrm{OCD}}\,.$$

Поскольку $S_{\triangle \mathrm{OAB}} = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{OB}| \cdot |\mathrm{AB}|$, $\quad S_{\triangle \mathrm{OCD}} = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{OD}| \cdot |\mathrm{CD}|$, а площадь кругового сектора $S_{\cup \mathrm{OAD}} = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{OD}| \cdot \alpha$, то с учетом $|\mathrm{OD}| = 1$ приходим к неравенствам

$$\frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \quad \leq \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \alpha \quad \leq \quad \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha\,.$$

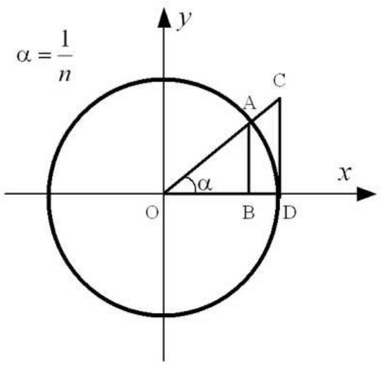


Рис. 3.3: К доказательству равенства $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$.

или

$$\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n} \quad\le\quad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{n} \quad\le\quad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg}\frac{1}{n}$$

Далее преобразуя, получаем

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n}} \quad\ge\quad n \quad\ge\quad \frac{\cos\dfrac{1}{n}}{\sin\dfrac{1}{n}}.$$

Откуда, окончательно, следует, что

$$\frac{1}{\cos\frac{1}{n}} \quad\ge\quad n\cdot\sin\frac{1}{n} \quad\ge\quad \cos\frac{1}{n}.$$

Теперь можно воспользоваться свойствами пределов числовых последовательностей. Будем считать, что

$$x_n = \frac{1}{\cos\frac{1}{n}}\ ; \quad z_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}\ ; \quad y_n = \cos\frac{1}{n}\ .$$

Тогда, в силу очевидного равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n} = 1$ и теоремы "О двух милиционерах" – свойства 6°, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$.

К необходимости вычисления последнего из указанных выше пределов $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ приводит задача "о добром банке и жадном вкладчике", имеющая следующую формулировку.

Некий "добрый" банк предлагает своим вкладчикам 100% годовых по срочным вкладам, с равномерным во времени начислением процентов по вкладу. [1] У одного из его клиентов к началу года имеется денежная сумма размером в один рубль, которую он хочет положить в банк до начала следующего года. Очевидный расчет показывает, что вкладчик получит в конце года сумму в рублях: свой вклад 1 руб плюс 100%, то есть еще 1 руб. Итак,

$$S_1 = 1 + 1 = 2\ .$$

Однако вкладчику это кажется недостаточным и он рассуждает так: "если я положу свой рубль на первое полугодие, то 30 июня у меня будет $\left(1+\frac{1}{2}\right)$

[1] В жизни, конечно, никакой банк так никогда не делал и не делает.

руб, которые я положу на оставшиеся полгода. Тогда за год я буду иметь"

$$S_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}.$$

Хотя эффект данной операции очевиден, "жадному" вкладчику и этого мало. Следующие его рассуждения таковы: "если я положу свой рубль на первые четыре месяца, то к 1 мая у меня будет на руках $\left(1+\frac{1}{3}\right)$ руб, которые я положу на следующие четыре месяца и получу 1 сентября

$$\left(1+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right) = \left(1+\frac{1}{3}\right)^2.$$

Эту сумму я вкладываю на оставшиеся четыре месяца и получаю в итоге

$$S_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = 2\frac{10}{27},$$

что больше, чем S_2. "

Нетрудно видеть, что, если весь год разделить на n равных периодов, то полученная сумма составит

$$S_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} + \frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Исследуем теперь свойства числовой последовательности $S_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Во-первых, покажем, что $\forall n : S_{n+1} > S_n$. Действительно,

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left[\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right]^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left[\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

и, согласно неравенству Бернулли (см. гл.1, п.10°),

$$= \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) > \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Таким образом, $\frac{S_{n+1}}{S_n} > 1$ и последовательность S_n – *монотонно возрастающая*, то есть "шустрость" вкладчика оправдана. Теперь убедимся, что, сколь угодно большой суммы вкладчик получить тем не менее не сможет. Выполним следующую оценку воспользовавшись формулой бинома Ньютона (см. гл.1, п.7°),

$$S_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1^n + n\cdot 1^{n-1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot 1^{n-2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot 1^{n-3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots \le$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}++\frac{1}{2^3}+\ldots \leq$$

и, по формуле суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии (см. гл.1, п.8°), получаем

$$\leq 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

Это означает, что последовательность $\{S_n\}$ *ограничена сверху* и как бы вкладчик не суетился, даже трех рублей ему получить не удастся.

Согласно свойству 5°, числовая последовательность монотонно возрастающая и ограниченная сверху имеет предел. Значит, $\{S_n\}$ сходится. Пределом числовой последовательности $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ является иррациональное (подобно числу π) число, обозначаемое как e равное приближенно $e \approx 2.718281828459045\cdots$. Иначе говоря,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Это равенство принято называть *вторым замечательным пределом.*

Заметим, что непосредственное применение свойства 3° при вычислении, например, первого замечательного предела невозможно, поскольку из двух последовательностей $x_n = n$ и $y_n = \sin\frac{1}{n}$ сходится только вторая. Ее предел равен 0, в то время как первая неограничено возрастает. Подобный случай принято называть неопределенностью вида "$0\cdot\infty$" и для ее раскрытия потребовалось специальное исследование. Аналогичные проблемы возникают для неопределенностей вида

$$„\frac{0}{0}“ ,\quad „\frac{\infty}{\infty}“ ,\quad "\infty-\infty" ,\quad "1^{\infty}".$$

Второй замечательный предел является примером неопределенности последнего вида.

Преобразования формульной записи общего члена числовой последовательности в тех случаях, когда непосредственное использование свойств числовых последовательностей 1°–6° невозможно, принято называть методом "раскрытия неопределенностей."

Рассмотрим следующие задачи.

Пример 3.2.4.1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^2}{5n^2+3}$.

Формула значения члена последовательности является дробью, однако использование свойства 4° пока невозможно, поскольку

$$\lim_{n\to\infty}(3n+2)^2=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\left(5n^2+3\right)=+\infty\ .$$

То есть, мы имеем случай неопределенности вида "$\frac{\infty}{\infty}$". Для ее "раскрытия" (до перехода к пределу!) преобразуем числитель по формуле "квадрат суммы двух чисел", а затем разделим и числитель и знаменатель на n^2, в итоге получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^2}{5n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+12n+4}{5n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}}{5+\frac{3}{n^2}}.$$

Теперь, учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, видно, что пределы числителя и знаменателя существуют, и можно воспользоваться свойствами 4°, 2° и 1° .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9+\dfrac{12}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{5+\dfrac{3}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(9+\dfrac{12}{n}+\dfrac{4}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{3}{n^2}\right)}=\frac{9+12\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{5+3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}=\frac{9}{5}.$$

Пример 3.2.4.2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)$.

Формула общего члена последовательности $a_n=\sqrt{4n^2+3n}-2n$ представляет собой разность двух выражений, однако использовать свойство 1° мы не можем, ибо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2+3n}=+\infty \quad \text{и} \lim_{n\to\infty}2n=+\infty$$

и мы имеем неопределенность вида "$\infty-\infty$". Для ее "раскрытия," не переходя к пределу, умножим и одновременно разделим эту формулу на $\sqrt{4n^2+3}+2n$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+3n}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+3n}-2n)(\sqrt{4n^2+3n}+2n)}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n-4n^2}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}.$$

Полученный предел есть неопределенность вида "$\frac{\infty}{\infty}$," "раскрыть" которую можно делением числителя и знаменателя на n.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n}+2n}=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\dfrac{3}{n}}+2}=\frac{3}{4},$$

поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{3}{n}}=2$.

Действительно, с одной стороны, $\sqrt{4+\frac{3}{n}}\geq 2$, но, с другой

$$\sqrt{4+\frac{3}{n}}=\sqrt{4+2\cdot 2\cdot\frac{3}{4n}+\frac{9}{16n^2}-\frac{9}{16n^2}}=$$

$$=\sqrt{\left(2+\frac{3}{4n}\right)^2-\frac{9}{16n^2}}\leq\sqrt{\left(2+\frac{3}{4n}\right)^2}=2+\frac{3}{4n}.$$

То есть,

$$2+\frac{3}{4n}\geq\sqrt{4+\frac{3}{n}}\geq 2,$$

и в силу теоремы "о двух милиционерах," приходим к заключению о том, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{3}{n}}=2$.

Пример 3.2.4.3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n$.

Здесь мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2}{2n+1}=1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n=\infty$, то есть неопределенность вида "1^∞." Чтобы "раскрыть" ее, преобразуем выражение под знаком предела следующим образом.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^n=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{2}+\frac{1}{2}}=$$

где $k=2n+1$ и $n=\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}k=\infty$

$$=\left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}\cdot 1=\sqrt{e}.$$

3.2.5 Последовательности нечисловых объектов

В завершение обсуждения темы "числовые последовательности" отметим, что последовательности можно образовывать не только из чисел, но и из математических объектов более сложного вида, скажем, функций или матриц. Поясним это следующими примерами.

Пример 3.2.5.1. Рассмотрим множество функций вида $y_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n^2}$, где n – произвольное натуральное число.

У каждой из таких функций область определения $X_n:\{(-\infty,+\infty)\}$ – множество всех вещественных чисел, в то время как область значений Y_n : $\left\{\left(0,\dfrac{1}{n^2}\right]\right\}$ – различная для разных номеров n.

Для каждого номера n функция указанного вида существует и единственна, поэтому для описания совокупности всех таких функций можно использовать термин *функциональная последовательность*, который можно рассматривать как обобщение понятия числовой последовательности поскольку для каждого фиксированного $x\in X_n$ формула $y_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n^2}$ задает именно числовую последовательность.

Легко видеть, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^2+n^2}=0$ при любых $x\in X_n$. Поэтому естественно функцию $y^*(x)$, равную $0\ \forall x\in\{(-\infty,+\infty)\}$, назвать пределом функциональной функциональной последовательности $y_n(x)$ и записывать этот факт в виде $\lim\limits_{n\to\infty}y_n(x)=y^*(x)$.

Подобная ситуация имеет место и для матриц. Действительно, раз элементами матриц являются числа, то матричные последовательности можно строить, заменяя эти элементы членами числовых последовательностей, имеющими одинаковые номера.

Пример 3.2.5.2. Пусть элементами квадратной матрицы второго порядка

$$\|A_n\|=\left\|\begin{matrix}a_{11,n} & a_{12,n}\\ a_{21,n} & a_{22,n}\end{matrix}\right\|$$

являются члены числовых последовательностей

$$a_{11,n} = \frac{n}{n+1}\ , \quad a_{12,n} = \frac{1}{n+2}\ , \quad a_{21,n} = \frac{1}{n+1}\ , \quad a_{22,n} = \frac{n}{n+2}\ ,$$

тогда присваивая номерам значения $1, 2, 3, \ldots$ получим последовательность состоящую из матриц

$$\left\{ \ \left\| \begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{array} \right\| , \left\| \begin{array}{cc} \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array} \right\| , \left\| \begin{array}{cc} \frac{3}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{5} \end{array} \right\| , \left\| \begin{array}{cc} \frac{4}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{array} \right\| , \cdots \right\}$$

Поскольку последовательности $\{a_{11,n}\}, \{a_{12,n}\}, \{a_{21,n}\}, \{a_{22,n}\}$ сходящиеся и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1\ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0\ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0\ , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} = 1\ ,$$

то можно сказать, что и матричная последовательность $\|A_n\|$ сходится и притом к единичной матрице второго порядка, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n\| = \|E\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| .$$

Пример 3.2.5.3. Еще раз вспомним "задачу о жуках."

Пусть столбец $\|X_n\| = \left\| \begin{array}{c} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ x_{3,n} \end{array} \right\|$ описывает распределение жуков по средам обитания во время наблюдения с номером n. Тогда распределение при следующим, $n+1$-ом наблюдении, согласно соотношению (2.3.2) будет определяться формулой

$$\|X_{n+1}\| = \|A\| \cdot \|X_n\|\ ,$$

или в развернутом виде

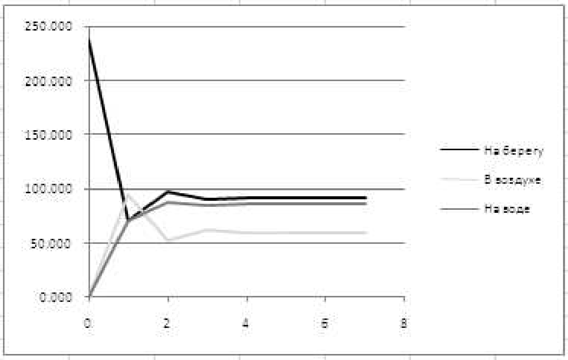
$$\left\| \begin{array}{c} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \\ x_{3,n+1} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ x_{3,n} \end{array} \right\| .$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемой задаче возникает матричная последовательность $\{X_n\}$, заданная рекуррентно, каждый член которой является трехкомпонентным столбцом, описывающем распределение числа жуков по средам обитания во время n-го наблюдения.

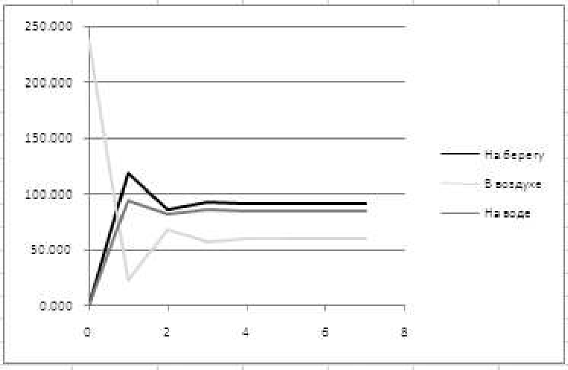
Получение аналитической формы записи членов этой последовательности является весьма сложной математической задачей и выходит за рамки нашего курса. Однако, представление о характере поведения ее членов с ростом n можно получить, проведя численные расчеты и построив графические диаграммы.

Предполагая, что полная численность колонии постоянна и равна 238 особям, найдем несколько начальных членов этой последовательности для различных исходных вариантов распределения жуков по средам. Рассмотрим случаи "в начале все жуки были на берегу", затем - "в начале все жуки

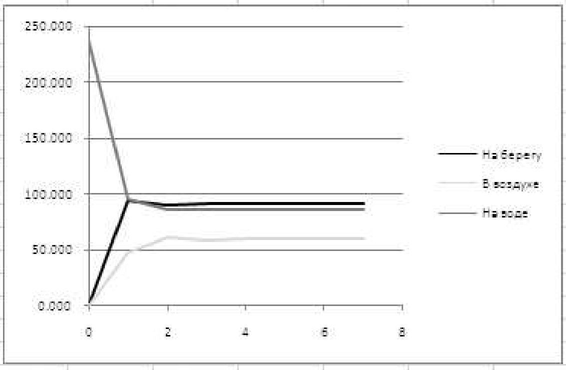
Итерация	На берегу	В воздухе	На воде
0	238.000	0.000	0.000
1	71.400	95.200	71.400
2	97.580	52.360	88.060
3	90.678	61.880	85.442
4	92.000	60.000	86.000
5	92.000	60.000	86.000
6	92.000	60.000	86.000
7	92.000	60.000	86.000



Итерация	На берегу	В воздухе	На воде
0	0.000	238.000	0.000
1	119.000	23.800	95.200
2	85.680	69.020	83.300
3	93.534	57.834	86.632
4	92.000	60.000	86.000
5	92.000	60.000	86.000
6	92.000	60.000	86.000
7	92.000	60.000	86.000



Итерация	На берегу	В воздухе	На воде
0	0.000	0.000	238.000
1	95.200	47.600	95.200
2	90.440	61.880	85.680
3	92.344	59.500	86.156
4	92.000	60.000	86.000
5	92.000	60.000	86.000
6	92.000	60.000	86.000
7	92.000	60.000	86.000



Итерация	На берегу	В воздухе	На воде
0	79.000	79.000	80.000
1	95.200	55.500	87.300
2	91.230	61.090	85.680
3	92.186	59.737	86.077
4	92.000	60.000	86.000
5	92.000	60.000	86.000
6	92.000	60.000	86.000
7	92.000	60.000	86.000

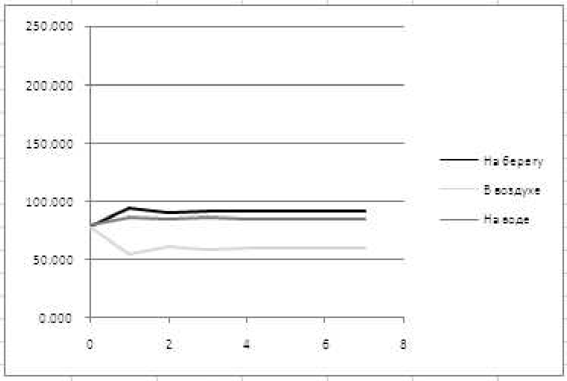


Рис. 3.4: Изменение распределения числа жуков по средам обитания

были в воздухе", "в начале все жуки были на воде" и, наконец, случай, когда число жуков в различных средах в начале было примерно одинаковым. Соответствующие столбцы этих начальных распределений имеют вид:

$$\begin{Vmatrix} 238 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 0 \\ 238 \\ 0 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 238 \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} 79 \\ 79 \\ 80 \end{Vmatrix}.$$

Результаты расчетов и графики изменения распределений числа жуков по средам обитания показан на рис.3.4.

Представляется интересным тот факт, что последовательности оказались сходящимися (и довольно быстро) к равновесному распределению, которое совпадает с собственным вектором матрицы $\|A\|$, отвечающему ее собственному значению $\lambda = 1$, и имеющему вид

$$\begin{Vmatrix} 92 \\ 60 \\ 86 \end{Vmatrix}.$$